Arnaud Valence

Esquisse d'une dualité géométrico-algébrique multidisciplinaire : la dualité d'Isbell

---

VALENCE Arnaud. *Esquisse d'une dualité géométrico-algébrique multidisciplinaire : la dualité d'Isbell*, sous la direction de Jean-Baptiste Joinet, Université Jean Moulin (Lyon 3) et Michele Abrusci, Université de Rome III (Italie). Thèse soutenue le 30/04/2017
Disponible sur : http://www.theses.fr/2017LYSE3032

Document diffusé sous le contrat Creative Commons « Paternité – pas d'utilisation commerciale - pas de modification » : vous êtes libre de le reproduire, de le distribuer et de le communiquer au public à condition d'en mentionner le nom de l'auteur et de ne pas le modifier, le transformer, l'adapter ni l'utiliser à des fins commerciales.

N°d’ordre NNT : 2017LYSE3032

THESE de DOCTORAT DE L’UNIVERSITE DE LYON
Opérée au sein de
l’Université Jean Moulin Lyon 3
en cotutelle avec l'Université de Rome 3

Ecole Doctorale de Philosophie N° 487

Discipline de doctorat : Philosophie
Spécialité : Philosophie - Études des systèmes

Soutenue publiquement le 30/04/2017, par :
Arnaud VALENCE

Esquisse d'une dualité géométrico-algébrique multidisciplinaire : la dualité d'Isbell

---

Longo, Giuseppe	Dir. de recherche au CNRS	ENS, Paris	Rapporteur
Szczeciniarz, Jean-Jacques	Prof. des universités	Univ. Paris 7, Paris	Rapporteur
Castellana, Mario	Prof. Associato	Univ. del Salento, Lecce	Examinateur
Petroni, Angelo Maria	Prof. Ordinario	Univ. Roma La Sapienza, Rome	Examinateur
Abrusci, Michele	Prof. Ordinario	Univ. Roma Tre, Rome	Directeur de thèse
Joinet, Jean-Baptiste	Prof. des universités	Univ. Jean Moulin Lyon 3, Lyon	Co-directeur de thèse

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
DOTTORATO « CULTURA, EDUCAZIONE, COMUNICAZIONE »

UNIVERSITÉ LYON III JEAN MOULIN
DOCTORAT DE PHILOSOPHIE « ÉTUDE DES SYSTÈMES »

ARNAUD VALENCE
DOTTORANDO DI RICERCA / DOCTORANT

CICLO XXIX
COORDINATORE : FRANCESCO MATTEI

BOZZA DI UNA DUALITÀ GEOMETRICO-ALGEBRICA PLURIDISCIPLINARE : LA DUALITÀ DI ISBELL

ESQUISSE D'UNE DUALITÉ GÉOMÉTRICO-ALGÉBRIQUE PLURIDISCIPLINAIRE : LA DUALITÉ D'ISBELL

TUTOR (ROMA) : MICHELE ABRUSCI
CO-TUTOR (LYON) : JEAN-BAPTISTE JOINET

ANNO ACCADEMICO 2016/2017

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mes directeurs Michele Abrusci et Jean-Baptiste Joinet, sans lesquels cette thèse n'aurait pas été envisageable. L'intervention de Michele Abrusci fut providentielle pour trouver un environnement de travail adapté, tant à mon projet qu'à ma situation particulière, l'un et l'autre atypiques. Non seulement ce fut une chance de vivre à Rome, mais le cadre de travail fut idéal, entre la liberté de travail inespérée que j'ai eu du début à la fin, et la prodigalité des remarques de Michele Abrusci. Mais cette chance n'aurait pu être saisie sans le concours de Jean-Baptiste Joinet qui, en parfait passeur, m'a ouvert à la logique contemporaine. C'est lui qui a allumé la flamme de ma stimulation intellectuelle, pour finalement accepter de me prendre sous sa direction. Je pense avoir eu beaucoup de chance d'avoir croisé la route de mes deux directeurs, et de ne jamais avoir été dévié de mon objectif final.

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide de différents financeurs. Je remercie l'université Roma Tre pour la bourse de thèse qui me fut attribuée durant ces 3 ans, mais aussi l'université de cotutelle Lyon 3 Jean Moulin, pour la bourse de mobilité dont j'ai pu bénéficier. Je remercie également Jean-Baptiste Joinet, qui a eu l'obligeance de me confier son enseignement de logique en licence.

Je remercie le personnel et les responsables de l'université Roma Tre, au premier rang desquels Francesco Mattei, qui m'a accueilli avec beaucoup de bienveillance, et m'a fort aimablement proposé très tôt des publications dans sa revue scientifique. Je remercie également le personnel du service de la recherche de l'université de Lyon 3 Jean Moulin, particulièrement Marie-Josée Berlandi, responsable des co-tutelles internationales, et Julie Sylvestre, responsable des aides financières.

Je remercie chaleureusement mes rapporteurs, Claudia Casadio, Giuseppe Longo, Alberto Naibo et Jean-Jacques Szczeciniarz qui ont accepté d'évaluer ce travail aux multiples formes, mais aussi les rapporteurs secondaires qui ont eu pour mission de vérifier une partie de l'ouvrage : François Allisson, Jérôme Lallement, Claude Parthenay et Alessandro Verra. Je remercie également les chercheurs qui m'ont consacré une partie de leur temps pour me lire et me stimuler, plus ou moins activement : Jean Cartelier, David Corfield, Urs Schreiber, Jean-Yves Girard, Roberto Maragliano.

Je remercie chaleureusement tous ceux qui ont bien voulu me relire, me corriger, ou tout simplement m'aider dans mon quotidien de doctorant ; merci à Jiaoyin pour son aide et son extrême gentillesse, à Elena pour sa précieuse relecture dans la langue de Dante. Un remerciement particulier à Jennifer pour son accompagnement spécial.

Mes remerciements vont aussi à ma famille et mes amis, pour leur affection maintes fois renouvelée, malgré la distance. Merci aux Romains qui, pendant tout ce temps, m'ont toujours accueilli avec beaucoup d'hospitalité. C'est avec le coeur serré que je quitte la Ville Éternelle.

Enfin, mon dernier mot va à Mylène, sans laquelle ce travail n'aurait pu être imaginé. Je lui dois bien plus qu'un indéfectible soutien. Les mots les plus simples étant les plus forts, ce n'est pas un remerciement, mais une indicible gratitude.

Ringraziamenti

I miei primi ringraziamenti vanno ai miei direttori Michele Abrusci e Jean-Baptiste Joinet, senza i quali questa tesi non sarebbe stato possibile. L'intervento di Michele Abrusci è stato provvidenziale per trovare un ambiente di lavoro adeguato, come il mio progetto e la mia situazione sono atipici. Non solo era una fortuna di vivere a Roma, ma l'ambiente di lavoro era ideale, tra la libertà di lavoro inaspettata e la prodigalità delle osservazioni di Michele Abrusci. Ma questa fortuna non sarebbe stata possibile senza l'aiuto di Jean-Baptiste Joinet, che mi ha aperto alla logica contemporanea. Lui ha suscitato il mio interesse intellettuale e finalmente ha accettato di prendere me sotto la sua direzione. Ero molto fortunato di incontrare i miei due direttori, e di non essere stato deviato dal mio obiettivo finale.

Questo lavoro non sarebbe possibile senza l'aiuto di diversi finanziatori. Grazie all'università Roma Tre per la borsa di studio durante questi tre anni, ma anche l'università di cotutela Lyon III Jean Moulin, per la borsa di mobilità che ho beneficiato. Ringrazio anche Jean-Baptiste Joinet, che mi ha affidato molto gentilmente il suo insegnamento di logica.

Ringrazio il personale e i responsabili dell'Università Roma Tre, primo fra tutti Francesco Mattei, che mi ha accolto molto gentilmente e mi ha proposto pubblicazioni nella sua rivista scientifica. Ringrazio anche il personale di servizio della ricerca dell'Università Lyon III Jean Moulin, particolarmente Marie-Josée Berlandi, responsabile delle co-tutela internazionale e Julie Sylvester, responsabile dei aiuti finanziari.

Ringrazio i miei esaminatori calorosamente, Claudia Casadio, Giuseppe Longo, Alberto Naibo e Jean-Jacques Szczeciniarz, ma anche i esaminatori secondari che sono stati dati il compito di verificare parte della tesi : François Allison, Jerome Lallement, Claude Parthenay e Alessandro Verra. Ringrazio anche i ricercatori che mi hanno dedicato una parte del loro tempo a leggere mi e a stimolare mi, più o meno attivamente : Jean Cartelier, David Corfield, Urs Schreiber, Jean-Yves Girard, Roberto Maragliano.

Ringrazio calorosamente tutti quelli che hanno letto e corretto il mio lavoro, o semplicemente che mi hanno aiutato nel mio dottorato quotidiano ; grazie a Jiaoyin per il suo aiuto e la sua estrema gentilezza, a Elena per il suo prezioso correzione della lingua di Dante. Un ringraziamento speciale a Jennifer per il suo supporto speciale.

I miei ringraziamenti vanno anche alla mia famiglia e ai miei amici per il loro affetto di tutti i giorni, nonostante la distanza. Grazie ai Romani che, durante tutto questo tempo, mi hanno sempre accolto con grande ospitalità. E con il cuore in gola che lascio la Città Eterna.

Infine, la mia ultima parola va a Mylène, senza la quale questo lavoro non sarebbe stato possibile immaginare. Gli devo molto più che un instancabile sostegno. Le parole più semplici sono i più forti, non è un ringraziamento, ma un indicibile gratitudine.

Avant-propos

Elles dorment dans le secret de la terre
jusqu'à ce qu'il prenne fantaisie à l'une d'elles de se réveiller.
Antoine de Saint-Exupéry

Le présent travail est le fruit d'un long processus d'incubation qui s'origine dans ma première thèse, soutenue en décembre 2004 à l'ÉHESS. C'est à cette époque que nait mon intérêt pour la constructivité, et plus particulièrement pour les méthodes constructives en mathématique. Secrètement rangé dans le grenier de mes songes inassouvis, cet intérêt fut relancé huit ans plus tard, à la faveur d'un master de philosophie effectué à l'université Paris 1 Panthéon-Sorbonne. La découverte de la logique contemporaine, et plus particulièrement de la géométrie de l'interaction de Jean-Yves Girard, fit entrer en résonance mon précédant travail et l'avant-garde de la logique contemporaine. C'est alors tout naturellement que fut décidé d'entreprendre une seconde thèse, sous le patronage d'un fin connaisseur et passeur : Jean-Baptiste Joinet.

En ce qui concerne le processus de production de la thèse proprement dit, j'ai disposé de 3 ans pour la réaliser. Pendant tout ce temps, je me suis efforcé de mettre mon activité de chef d'entreprise entre parenthèses pour la mener à bien. Je dois confesser que ce choix de vie fut plus difficile que prévu. Scientifiquement parlant, le sujet final de la thèse ne fut arrêté qu'en février 2015, soit un peu plus d'un an après son commencement. À l'instar du chien truffier, j'avais senti qu'un rhizome dissimulé se trouvait là, connectant souterrainement la géométrie de l'interaction de Girard, mes intuitions en SHS et les autres formes de dualité présentes en mathématique et en physique. J'ai longtemps fouillé, et c'est finalement la découverte de la dualité d'Isbell qui m'a mis sur la voie. Cette découverte n'aurait pas été possible sans le foisonnant wiki *n*Lab dont on peut remercier les auteurs.

Je dois également avouer que le temps m'a manqué pour harmoniser la thèse. En particulier, le chapitre sur la logique n'exemplifie pas assez, à mon goût, l'introduction générale programmatique. Il faut cependant comprendre le rôle particulier de ce chapitre dans la thèse : c'est la logique qui amena le sujet final de la thèse au 14ème mois, et le temps m'a indéniablement manqué pour effectuer la rétroaction du sujet final sur la matière qui en fut la cause essentielle. Comme je le précise à la fin de ce chapitre, mon travail reste très en deçà d'une véritable relecture de la syntaxe transcendantale de Girard en termes de dualité d'Isbell. Une telle relecture, qui consiste à boucler la syntaxe transcendantale sur la catégorie géométrique duale qui lui correspond, semble à ce jour hors de portée.

Par ailleurs, le temps m'a également manqué pour mener à bien le chapitre relatif à la physique quantique. Je suis persuadé que la théorie quantique des champs, qui exhibe une dualité géométrico-algébrique, est exprimable sous la forme d'une dualité d'Isbell, comme l'a suggéré Urs Schreiber. À en croire Urs Schreiber, David Corfield et Zoran Škoda, il semble qu'il soit possible de soutenir cette idée en exploitant la dualité entre la quantisation géométrique des groupoïdes symplectiques et la quantisation algébrique des algèbres stellaires. Mais c'est aussi une question difficile (surtout pour le non-physicien que je suis), qui à elle seule aurait été le sujet d'une belle thèse. Il ne reste donc dans cette thèse qu'une ébauche de la problématique, que j'ai préféré rejeter en annexe. Des développements plus avancés sont prévus dans mes futurs travaux.

Résumé de la thèse

Après avoir exposé l'importance des dualités géométrico-algébriques dans l'histoire des mathématiques, la thèse propose de rassembler bon nombre d'entre elle sous une approche unifiée abstraite, la dualité d'Isbell. La dualité d'Isbell est formellement définie comme une adjonction entre un préfaisceau et un copréfaisceau, et permet de définir un nouveau paradigme de constructivité baptisé $\mathfrak{P}_3$. En mathématique, nous montrons que cette dualité est présente en géométrie algébrique, en géométrie algébrique dérivée, en topologie algébrique et en analyse fonctionnelle. En logique contemporaine, nous montrons qu'elle peut être rendue explicite dans la géométrie de l'interaction de Girard. Nous montrons ensuite comment les sciences appliquées peuvent faire usage de la dualité d'Isbell, en permettant de renouveler significativement les théories. En sciences physiques, nous montrons qu'elle ouvre une perspective dans la théorie quantique des champs, vers la dualisation des représentations de Heisenberg et de Schrödinger. En sciences économiques et sociales, nous montrons qu'elle permet de renouveler la théorie de l'équilibre générale et la théorie de la valeur. En sciences de l'apprentissage, nous montrons qu'il est possible de reconsidérer la théorie de l'enquête de Dewey en termes de dualité espace-action, pour finalement dégager une dualité d'Isbell. Nous concluons en ouvrant un débat sur la notion bachelardienne d'obstacle épistémologique, pour montrer comment $\mathfrak{P}_3$ peut avoir des difficultés à s'imposer, et en consacrant quelques développements ontologiques sur la nature kantienne et post-hégélienne de la thèse.

Riassunto della tesi

Dopo aver spiegato l'importanza delle dualità geometrico-algebriche nella storia della matematica, la tesi si propone di riunire molti di queste dualità in un approccio unificato astratto, la dualità di Isbell. La dualità di Isbell è formalmente definita come un'aggiunzione tra un prefascio e un coprefascio, e caratterizza un nuovo paradigma di costruttiva chiamato $\mathfrak{P}_3$. In matematica, mostriamo che questa dualità è presente in geometria algebrica, in geometria algebrica derivata, in topologia algebrica e in analisi funzionale. In logica contemporanea, mostriamo che può essere esplicitato nella geometria dell'interazione di Girard. Poi mostriamo come le scienze applicate possono fare uso della dualità di Isbell, che consente di rinnovare in modo significativo le teorie. In scienze fisiche, mostriamo che si apre una prospettiva nella teoria quantistica dei campi, verso la dualizzazione delle rappresentazioni di Heisenberg e di Schrödinger. In scienze economiche e sociale, mostriamo che possiamo rinnovare la teoria dell'equilibrio generale e la teoria del valore. In scienze del apprendimento, mostriamo che è possibile riconsiderare la teoria dell'indagine di Dewey in termini di dualità azione-spazio, e alla fine in termini di dualità di Isbell. Concludiamo con l'apertura di un dibattito sul concetto di ostacolo epistemologico di Bachelard, per mostrare come $\mathfrak{P}_3$ può avere difficoltà a vincere, e dedichiamo alcuni sviluppi sulla natura ontologica kantiana e post-hegeliana della tesi.

Abstract of the thesis

After exposing the importance of geometric-algebraic dualities in the history of mathematics, the thesis proposes to bring together many of them under an unified abstract approach, the Isbell duality. The Isbell duality is formally defined as an adjunction between a presheaf and a copresheaf, and allows to define a new paradigm of constructivity called $\mathfrak{P}_3$. In mathematics, we show that this duality is present in algebraic geometry, derived algebraic geometry, algebraic topology and functional analysis. In contemporary logic, we show that Isbell duality can be made explicit in the geometry of interaction of Girard. We then show how applied sciences can make use of Isbell duality, allowing to significantly renew theories. In physical sciences, we show that it opens a perspective in quantum field theory, towards the dualization of Heisenberg and Schrödinger representations. In economic and social sciences, we show that it allows to renew the general equilibrium theory and the theory of value. In learning sciences, we show that it is possible to reconsider Dewey's theory of inquiry in terms of space-action duality, ultimately to reveal an Isbell duality. We conclude by opening a debate on the Bachelardian notion of epistemological obstacle, showing how $\mathfrak{P}_3$ can have difficulties to establish itself as reference constructive paradigm, and by devoting some ontological developments to the Kantian and post-Hegelian nature of the thesis.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Contents

Résumé

Après avoir exposer la différence entre montrer et démontrer, que nous identifions comme une dualité entre *morphé* et *logos*, entre visuel et textuel, ou encore entre géométrie et algèbre, nous présentons une notion d'abstraction qui la conceptualise, que nous nommons abstraction axiomatisante. Nous montrons ensuite en quoi cette abstraction axiomatisante se distingue de l'abstraction généralisante, et en quoi les deux notions d'abstraction ainsi dégagées peuvent apparaître comme complémentaires. Cette complémentarité nous amène à identifier deux ruptures paradigmatiques, la première représentative d'une abstraction généralisante, qualifiée de « matérielle », la seconde représentative d'une abstraction axiomatisante, qualifiée de « formelle », la seconde se nourrissant de la première. Nous présentons ensuite un outil issu de la théorie des catégories capable de traduire mathématiquement les dualités de type géométrie/algèbre : la dualité d'Isbell. Nous portons notre attention sur les portées épistémologique, heuristique et ontologique de la dualité d'Isbell, et nous finissons par résumer le contenu de la thèse.

Riassunto

Dopo aver esposto la differenza tra *mostrare* e *dimostrare*, che identifichiamo come una dualità tra *morphè* e *logos*, tra visuale e testuale, o tra geometria e algebra, presentiamo un principio di astrazione che lo concettualizza, che chiamiamo *astrazione assiomatizzante*. Poi mostriamo come quest'*astrazione assiomatizzante* si differenzia dalla *astrazione generalizzante*, e come i due concetti di astrazione così definiti sono complementari. Questa complementarietà porta ad individuare due rotture paradigmatiche, la prima rappresentativa di un'astrazione generalizzante, chiamata « materiale », la seconda rappresentativa di un'astrazione assiomatizzante, chiamata « formale », la seconda rottura alimenta la prima. Poi presentiamo uno strumento derivato dalla teoria delle categorie in grado di tradurre matematicamente le dualità di tipo geometria / algebra : la dualità di Isbell. Ci concentriamo sulle portate epistemologica, euristica e ontologica della dualità di Isbell, e finiamo con il riassumere il contenuto della tesi.

Abstract

After exposing the difference between *showing* and *proving*, which we identify as a duality between *morphé* and *logos*, between visual and textual, or between geometry and algebra, we present a notion of abstraction that conceptualizes it, which we call *axiomatizing abstraction*. We then show how this axiomatizing abstraction differs from the *generalizing abstraction*, and in what way the two notions of abstraction thus revealed may appear to be complementary. This complementarity leads us to identify two paradigmatic ruptures, the first representative of a generalizing abstraction, described as "material", the second representative of an axiomatizing abstraction, called "formal", the second being nourished by the first. We then present a tool derived from the theory of categories capable of mathematically translating the dualities of type geometry / algebra : the duality of Isbell. We turn our attention to the epistemological, heuristic and ontological implications of Isbell's duality, and we finally summarize the content of the thesis.

1.1 Montrer et démontrer

Qu'est-ce que *montrer* ? Qu'est-ce que *démontrer* ? Que suggère une *démonstration* par rapport à une *monstration* ? *Monstrare*, *demonstrare* : en latin, le préfixe *de-* n'indique pas la privation mais l'achèvement : *demonstrare*, c'est *monstrare* définitivement. Mais comment, par quel acte précis ? Dans la langue sacrée, comme le rappelle Lavand [108], *monstrare* c'est produire un *monstrum*, un signe des Dieux. Dans la langue profane, c'est plutôt montrer le (bon) chemin, indiquer la bonne direction, mais aussi montrer la bonne façon de faire, montrer l'exemple. Dans tous les cas, la « monstration » requiert donc des signes. Dans ce cadre, quel peut être le sens de l'achèvement de l'ostentation ? Le *demonstrare* traduit-il une différence de nature ou une différence de degré avec le *monstrare* ? Est-ce une monstration portée à la perfection ou est-ce autre chose ? La langue latine tend plutôt vers une différence de degré : la *demonstratio* tendrait à ajouter à la monstration, à l'indication, une explicitation parachevant l'effort d'ostentation. Démontrer, c'est montrer en identifiant explicitement les objets désignés. Mais quel est le sens de cette identification ?

Plus philosophique et conceptuelle, la langue grecque tend, pour sa part, davantage vers une différence de nature. Le grec ne possède pas une seule façon d'évoquer le couple notionnel montrer / démontrer. Le grec distingue en réalité trois niveaux de couples. Au premier niveau se trouve la différence entre *deixis* et ses concepts dérivés, *epideixis* et *apodeixis*. Alors que la *deixis* désigne une action générique pouvant signifier à la fois désigner — « faire voir » — et prouver, les concepts d'*epideixis* et *apodeixis* marquent la polarité de cette dualité : l'*epideixis* [*epi*=sur + *deixis*=montrer] montre par l'ostentation là où l'*apodeixis* [*apo*=de + *deixis*=montrer] montre par la preuve. Cette dualité caractérise un second niveau ; le premier niveau distingue l'*action* générique de montrer du mode de cette action, le second niveau distingue le *mode d'action* ostentatoire et le mode d'action discursif. Mais il existe un troisième niveau problématisant la *finalité* de l'action. Que doit réellement viser la *deixis* ? La description objective de l'objet, son éloge, sa caricature ? Doit-elle tirer sa force de persuasion de la capacité de l'émetteur à séduire le récepteur (*pathos*), de la crédibilité de l'émetteur (*êthos*) ou de l'exactitude du message (*logos*), comme l'aurait dit un Barthes ([15]) ? Si l'on porte notre attention sur l'exactitude du message, on peut se demander ce que peut signifier une « exactitude *épidictique* ». Si l'on se souvient que le genre épidictique appartient à l'empire rhétorique chez Aristote ([3] [5]), on est amené à conclure que l'exactitude du message doit appartenir à l'ordre de l'*apodeixis* (à moins d'entendre rhétorique comme raisonnement pur, dans une veine socratique). Symétriquement, on peut se demander ce que peut signifier une *apodeixis* tirée vers l'éloquence de l'orateur ou la manipulation de l'auditoire. Si l'on entend par là une forme de sophistique qui donne à voir des raisonnements *a priori* cohérents mais *a posteriori* viciés, on est ici amené à écarter l'*epideixis* du registre démonstratif (à moins d'entendre rhétorique comme simple adjuvant, stylistique et inoffensif, d'un raisonnement cohérent).

Nous voyons bien, en réalité, qu'une autre idée de monstration se cache dans le *monstrum* latin. Voir la monstration à travers le schéma « émetteur - message - récepteur », c'est évidemment signer une pétition de principe confinant la monstration dans le registre performatif de la rhétorique. Il n'est donc pas surprenant de voir *in fine* le *monstrum* expulsé du champ apodictique. Mais si l'on consent maintenant à envisager le *monstrum* non plus comme l'ostentation produite par l'orateur (l'ostentation comme performance) mais comme le caractère ostensible du message lui-même (abstrait de l'émetteur), il devient possible de distinguer deux types d'*apodeixis* : une *apodeixis* monstrative tournée vers l'évidence du « signe » (un dessin, une figure géométrique, un diagramme), et une *apodeixis* démonstrative, tournée vers le raisonnement discursif, la preuve textuelle et la déduction logique. Nous avons donc identifié un troisième niveau, qui tend à replacer le couple monstration / démonstration dans la seule *apodeixis* (abandonnant ainsi l'*epideixis* à la rhétorique et ses variantes).

Il n'y aurait donc pas de différence de degré entre le montrer et le démontrer, mais bien une différence de nature. Le montrer procède d'une construction visuelle, de la « vérité du sensible » comme perception immédiate, tandis que démontrer procède d'une construction scripturale, d'un enchaînement de déductions partant d'un ensemble d'hypothèses pour aller jusqu'à un ensemble de conclusions. Alors que le montrer s'organise essentiellement dans l'espace, le démontrer s'exprime avant tout dans le temps. Cela ne veut pas dire que les modes d'intelligibilité spatial et temporel s'excluent les uns les autres, mais que le support du montrer est spatial, tandis que celui du démontrer est temporel. Par contre, le décodage de l'objet par le récepteur inverse les points de vue : le récepteur doit prendre le temps de comprendre la figure qu'il regarde, de la même façon qu'il doit se représenter spatialement, i.e. visualiser, ce qu'il comprend par le raisonnement. Il en va de même pour l'encodage de l'objet côté émetteur : celui-ci doit prendre le temps de construire sa figure sur son support, de la même façon qu'il doit délimiter clairement un espace d'exposition pour sa démonstration [1]. Cet espace est d'une autre nature que l'espace de la figure qui montre ; c'est l'espace de la monstration de la démonstration : il ne suffit pas de démontrer, il faut montrer la démonstration. Réciproquement, la temporalité de la construction géométrique est d'une autre nature que la temporalité du raisonnement ; c'est la temporalité de la construction spatiale, qui s'élabore dans la durée (pensons par exemple au barycentre d'un triangle, *cf. infra*), c'est la temporalité de la démonstration dans la monstration.

On en conclut que le couple notionnel montrer / démontrer traduit deux modes duaux d'accès à la connaissance, différents par nature, l'un visuel, l'autre scriptural. Ces modes d'accès sont apodictiques et font un usage lui-même dual de leur support d'expression spatio-temporel. Il nous faut donc maintenant porter notre attention sur les sens précis de ces modes d'accès à la connaissance. Détailler le sens du visuel et du scriptural, c'est avant toute chose interroger les mathématiques et leur histoire.

1.2 Le visuel et le scriptural

D'exemples de dualités entre visuel et scriptural, les mathématiques n'en manquent pas. Comme l'exposait Connes en 2004 à l'occasion de la remise de sa médaille d'Or du CNRS, les mathématiques fonctionnent depuis les origines sur deux registres complémentaires, le « visuel », qui perçoit instantanément le sens d'un théorème sur une figure géométrique et l'« écrit », qui s'appuie sur le langage, sur l'algèbre, et s'inscrit dans le temps. « L'ange de la géométrie et le diable de l'algèbre » se partagent ainsi la scène, selon le bon mot de Weyl [191], ce qui illustre bien les tensions existantes entre les deux chemins d'accès à la connaissance des objets mathématiques, entre les deux façons de les penser. Les mathématiques s'appuient par ailleurs sur

1. En mathématique, cet espace est typiquement délimité par les mots preuve (ou démonstration) et CQFD (ce qu'il fallait démontrer), ou un symbole de fin tel que □ ou ■.

deux grandes traditions, la tradition chinoise et la tradition grecque. La tradition chinoise est géométrique et concrète. Elle ne vise pas à démontrer à proprement parler. Plus exactement elle ne fait pas de différence linguistique entre ce que, nous autres Occidentaux, connaissons sous les termes de démonstration et monstration. Dans la tradition chinoise, une « démonstration » est une représentation, un dessin ; elle appartient à l'ordre de la *morphé*. *A contrario*, dans la tradition grecque, le raisonnement est plus volontiers discursif et abstrait. C'est la tradition du *logos*, qui donnera étymologiquement naissance à la logique. On retrouvera plus tard cette dualité chez Kant [102], qui qualifiera d'*ostensive* la méthode du géomètre, et de *discursive* celle du philosophe. Au-delà des mathématiques, l'histoire des sciences et de la philosophie nous enseigne que ce questionnement n'a jamais cessé de trôner dans l'art du raisonnement, même s'il a souvent travaillé secrètement.

La dualité entre la *morphé* et le *logos*, entre le visual et le scriptural, apparaît proprement dès les premiers grands textes grecs [2]. Pour Aristote ([6] [7]), toute connaissance scientifique doit pouvoir faire l'objet d'une retranscription discursive exacte. Avant Aristote, Euclide [50] avait déjà, implicitement, jeté les bases d'une dualité entre *morphé* et *logos* dans ses *Éléments*. Dans le livre VII, qui décrit l'algorithme permettant de déterminer le plus grand commun diviseur, les explications géométriques côtoient déjà les explications arithmétiques. On rapporte qu'Euclide avait même commencé la résolution du problème de façon géométrique : chercher le PGCD de deux nombres n'était pas autre chose que chercher la taille de la plus grande dalle carrée permettant de carreler entièrement une surface rectangulaire (en identifiant les côtés du rectangle au couple d'entiers dont on cherche le PGCD). En élaborant une méthode arithmétique et algorithmique, Euclide avait finalement réussi à en faire une *démonstration* hors de l'expérience sensible.

Les *Éléments* d'Euclide sonnaient comme le premier épilogue d'une controverse qui agitait les philosophes grecs au sujet des constructions comme preuves d'existence. Pour Théétète [3], les processus qui président à la construction des objets géométriques ne comptent pas comme preuve d'existence : les objets géométriques sont des idées, c'est-à-dire des réalités universelles, immatérielles et immuables. Pour Eudoxe, dont s'est inspiré Euclide [4], les objets géométriques s'incarnent au contraire dans leur processus de construction, d'où leur possible traduction dans une mathématique formelle.

La controverse sera prolongée vingt siècles plus tard avec le questionnement cartésien : les problèmes sont-ils accessibles à la raison sans intermédiaire ? Ce regain d'intérêt s'opère non sans un profond renouvellement de la dualité *morphé vs. logos*, car la géométrie de Descartes [42] marque une analytisation de la géométrie. Avec Euclide, la traduction scripturale des figures géométriques n'est encore qu'axiomatique, la fécondation des axiomes par l'analyse peut difficilement embrayer. Avec la nouvelle géométrie de Descartes, il devient possible de résoudre les problèmes géométriques au moyen d'équations algébriques.

Dans ce cadre, la dualité entre le visuel et le scriptural prend alors une nouvelle dimension [5]. C'est avec le calcul (vectoriel) que le scriptural doit désormais s'accorder,

2. On consultera par exemple Szabo [178]

3. L'oeuvre de Théétète nous est essentiellement connue par Platon, notamment dans son *Théétète* [146].

4. Eudoxe aurait écrit le Livre XII des *Élements* d'Euclide, et peut-être le Livre V.

5. Sans compter l'apparition de nouvelles dualités internes à la composante algébrique. On pense bien sûr à la dualité liant les espaces vectoriels et les applications linéaires. En algèbre linéaire, le

et non plus avec d'élémentaires rapports d'égalité, de proportion ou de commensurabilité. Le Livre II des *Élements*, improprement présenté comme le livre de l'algèbre géométrique, en donne une illustration. Il ne peut pas être encore, en effet, l'acte fondateur de l'algèbre géométrique, tout simplement parce que les propositions géométriques ne font pas encore l'objet d'une interprétation algébrique. Il faut attendre les mathématiques arabo-musulmannes pour que les propositions géométriques soient interprétées en termes d'anneaux, et les mathématiques européennes modernes pour qu'elles le soient en termes d'espaces vectoriels.

Il faut souligner que cet épisode de l'histoire des mathématiques est rattaché au développement de ce que l'on désigne aujourd'hui « algèbre géométrique » [6], et qu'il faut prendre soin de ne pas le confondre avec le développement de l' « la géométrie algébrique ». Depuis que la géométrie analytique a porté une attention grandissante sur l'étude directe des racines des équations polynomiales, délaissant la résolution des problèmes géométriques (par des équations algébriques), elle s'est peu à peu affranchie de l'analyse pour n'utiliser que des méthodes algébriques. C'est cette branche des mathématiques, recentrée sur les concepts d'*idéal* et de *variété algébrique*, que l'on appelle aujourd'hui géométrie algébrique. Or, cette branche plus récente des mathématiques a permis de jeter une autre lumière sur la dualité entre le visuel et le scriptural. Pour pouvoir définir correctement, c'est-à-dire sans ambiguïté, une fonction à partir d'un réel, on a besoin de plonger la fonction dans un espace adéquat. Dans les cas les plus simples, par exemple dans le cas polynomial, le plan réel ou complexe suffit à représenter la fonction associée. Mais, dans d'autres cas, par exemple en présence de radicaux, le plan complexe ne permet pas de définir correctement la fonction associée. La grande idée de Riemann [150] a été d'imaginer un revêtement à plusieurs feuillets pour lever les ambiguïtés de la fonction algébrique visée. Ces revêtements à plusieurs feuillets, appelés *surfaces de Riemann*, représentent ainsi des caractérisations spatiales de fonctions algébriques. Certes, il n'est pas interdit de penser que les surfaces de Riemann caractérisent davantage une règle guidant l'intuition sensible de l'espace que l'espace lui-même, mais il faut néanmoins souligner l'audace du mathématicien, qui invente une géométrie capable de représenter correctement toute fonction. De la sorte, l'idée de dualité géométrico-algébrique se trouve pour la première fois explicitée pour des cas complexes.

Pour changer de registre, la logique fournit un autre exemple de dualité similaire, particulièrement intéressant pour son rôle historique. En 1854, Boole [21] inaugure une algèbre de la logique, que vont ensuite approfondir Peirce [145], Schröder [161], Whitehead [192] ou encore Huntington [92]. Au début du 20ème, l'algèbre de Boole existe alors sous deux formulations axiomatiques équivalentes. La première est une algèbre de classes munie d'une loi unaire $\neg$ (la négation), de deux lois binaires $\wedge$, $\vee$ (la conjonction et la disjonction) ainsi que deux constantes 1 et 0 (le vrai et le faux). La seconde est une relation d'ordre partiel munie d'une loi unaire de complémentation $(\bar{.})$, d'une loi binaire d'inclusion $(\subset)$ ainsi que des constantes 0 et 1 (l'ensemble vide et l'ensemble entier). Comme l'analyse Serfati [167], le point important est que ces deux présentations équivalentes permettent d'abstraire la logique booléenne du calcul, c'est-à-dire de dégager toute idée sous-jacente d'opérandes (les notions d'ensemble, de partie d'ensemble, de complément d'ensemble). La logique post-

dual algébrique d'un espace vectoriel E est l'ensemble des formes linéaires sur E. Dans le cas où l'on munit l'espace vectoriel d'une structure topologique, le dual prend la forme particulière du *dual topologique*, qui est l'ensemble des formes linéaires continues.

6. Selon l'expression popularisée par Tannery [180].

booléenne est ainsi une logique *abstraite*, *non représentée*. Se pose alors la question de la représentation de la théorie axiomatique ainsi obtenue : à quel objet *concret* correspond l'algèbre de Boole abstraite ? Stone [173] [174] [177] répondra à la question avec deux apports décisifs. D'abord, moyennant le remplacement de la disjonction inclusive classique par la disjonction exclusive [7], Stone réinterprète l'algèbre de Boole en termes d'*anneaux de Boole*. Cette reformulation lui permet d'utiliser la théorie des idéaux pour valider la représentation ensembliste originelle : l'algèbre de Boole abstraite n'est pas plus générale que le calcul ensembliste concret de Boole. Mais Stone [175] va plus loin ; l'application de la théorie des idéaux le pousse quelques années plus tard à topologiser l'ensemble de tous les idéaux maximaux des parties d'un ensemble. Le résultat fondamental de Stone est alors qu'une algèbre de Boole abstraite peut être topologiquement représentée par un espace topologique totalement non-connexe, c'est-à-dire un espace topologique compact admettant une base de fermés-ouverts [8].

1.3 Axiomatisation et représentation

Ces illustrations permettent de tirer plusieurs conclusions. La première est l'omniprésence du principe de représentation en mathématique. Il a fallu du temps aux mathématiciens pour comprendre que les objets mathématiques se présentent à nous sous une forme *extrinsèque* [9]. Gauss [60] est peut-être le premier mathématicien à avoir compris que les objets géométriques demandent à être abstraits de leur plongement dans un référentiel (un espace de dimension 2, de dimension 3, etc.), pour en caractériser la forme intrinsèque. Mais on trouve déjà une démarche similaire dans le calcul barycentrique de Leibniz [119], qui abstrait le calcul vectoriel cartésien de tout repère cartésien [10]. Le même processus d'abstraction se retrouve en algèbre linéaire avec la matrice d'une application linéaire : si E et F dont deux espaces vectoriels de base respective A et B, une application linéaire ϕ de E dans F peut être identifiée par la matrice $mat_{A,B}(\phi)$ telle que, pour tout vecteur $x \in E$, $mat_B(\phi(x)) = mat_{A,B}(\phi) \times mat_A(x)$, de façon à faire apparaître ϕ de manière intrinsèque, indépendamment des bases des espaces vectoriels. C'est encore cette même quête d'intrinsèquéité que poursuivent les successeurs de Boole lorsqu'ils axiomatisent l'algèbre de Boole, qu'ils parviennent à dégager de son caractère ensembliste (*cf. infra* chap. 2).

Apparaît alors une condition d'existence régissant l'axiomatisation mathématique : un objet mathématique n'est bien axiomatisé (abstrait) que dans la mesure où l'action duale (concrète) d'exemplification retrouve l'objet initialement considéré. L'objet est ainsi ontologiquement stabilisé dans un double processus d'axiomatisation-

---

7. On note $+$ la disjonction exclusive telle que $x + y = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$

8. Par exemple $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ est un fermé-ouvert (ou fermouvert) dans $\mathbb{Q}$: $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ est un ouvert et son complémentaire est également un ouvert.

9. On pourra lire à ce sujet l'ouvrage de référence de Vuillemin [187]

10. Rappelons que selon la méthode des coordonnées cartésiennes, déterminer le milieu d'un segment exige de connaître les coordonnées de ses extrémités. Si A et B sont les points de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans le plan, le milieu M du segment AB est caractérisé par les coordonnées $(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B))$. L'apport de Leibniz consiste à abstraire la détermination équationnelle du point M de toute coordonnée, et donc de tout repère cartésien, grâce à la notation barycentrique $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$. Le milieu M du segment AB peut ainsi recevoir la caractérisation « abstraite » $M = Bar((A,1),(B,1)) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, que l'on peut généraliser de multiples façons (nombre de points, nombre de coordonnées, et pondérations quelconques).

représentation. Il ne manque plus alors que la représentation de l'objet extrinsèque lui-même, qui consiste à se donner un objet connu (une figure géométrique, un groupe concret, une matrice, etc.) pour « incarner » un objet. Toute structure algébrique intrinsèque (un anneau, une algèbre, un espace vectoriel, un groupe, etc.) donne alors lieu à une représentation extrinsèque, qui est un générateur ou un calcul (un calcul des permutations, un calcul booléen, un calcul matriciel, un lambda-calcul, etc.), qui à son tour donne lieu à une représentation concrète : sa concrétisation ou son incarnation via un objet particulier connu. Tel est le sens moderne de la dualité entre le visuel concret et le scriptural abstrait. Par calcul interposé, l'un représente l'autre, l'autre axiomatise l'un. Le passage de l'abstrait au concret s'obtient alors par une représentation de l'objet sous forme intrinsèque puis sous forme extrinsèque.

$$\begin{array}{c}\text{Structure}\\ \text{algébrique abstraite}\end{array} \xrightarrow[]{\substack{\text{représentation sous}\\ \text{forme intrinsèque}}} \text{calcul} \xrightarrow[]{\substack{\text{représentation sous}\\ \text{forme extrinsèque}}} \begin{array}{c}\text{espace ou}\\ \text{objet concret}\end{array}$$

FIGURE 1.1 – Passage de l'abstrait au concret

D'un point de vue plus philosophique, la dualité espace-calcul (ou espace-action) peut être vue sous le prisme d'une dualité englobante entre objet et opération. Les espaces peuvent en effet être vus comme des espèces particulières d'objets, et les algèbres comme des espèces particulières d'opérations, équipées de propriétés particulières. Pour Granger cette dualité est le témoin d'un contenu formel ([73] [74] [75]). On peut parler de contenu dans la mesure où il y a un rapport structural, une correspondance, ou encore un isomorphisme, entre un objet et une action qui le manipule. Ce contenu est formel car représentatif d'une formalisation, c'est la faculté de formaliser qui rend possible la correspondance entre concept et intuition [11]. Dans

11. Dans ce va-et-vient entre les deux pôles, qui se potentialisent, il faut souligner le rôle des innovations notationnelles, vers l'abstraction généralisante d'un côté, vers l'imagination spatiale de l'autre, pour reprendre une expression de Cavaillès. Lorsque Descartes, puis Newton, puis Leibniz introduisent la notation exponentielle, les développements mathématiques s'en trouvent considérablement allégés. Lorsque Pascal publie son traité de géométrie projective, il ne se doute pas que l'apparition des déterminants quelques décennies plus tard simplifiera radicalement la démonstration de ses théorèmes. Lorsque Hamilton introduit les tenseurs au milieu du 19ème siècle, les mathématiques pures et appliquées gagnent un tel pouvoir expressif que se produit un véritable feu d'artifice de résultats, et la théorie de la relativité générale est digne d'un bouquet final. Petites ou grandes, les innovations notationnelles se déploient en ordre dispersé. Parfois elles se contredisent, parfois elles sont abandonnées, et parfois elles s'imposent pour survivre à leur concepteur. Parmi leurs motivations figurent la recherche d'expressivité, la pureté du style, et la rigueur formelle. Parfois le style et la rigueur formelle s'imposent sans grande innovation. Les Lumières marquent à cet égard un tournant majeur. Jusque là mues par le primat du sens et de la didactique, les mathématiques prennent résolument l'emprunte de Legendre, dont le style est marqué par une grande rigueur formelle, en direction du *logos*. Mais cette expressivité, ce style et cette rigueur ne vont pas en direction du seul *logos*. Ils intéressent aussi la *morphé*. Ainsi l'idéographie de Frege inaugure une nouvelle façon d'envisager le rapport entre le sens et la syntaxe, pour cette fois tirer sur la *morphé*. Le style frégéen est à ce point figurativement expressif qu'on imagine sans peine les difficultés que rencontra Frege pour trouver un imprimeur (et finalement un éditeur). À partir des années 30 les choses s'accélèrent. Avec Gentzen, la théorie de la démonstration trouve un style géométrique mettant en évidence les arborescences (déduction naturelle) et les symétries (calcul des séquents). Dans les années 40, l'apparition de la théorie des catégories fait subir un sort comparable aux mathématiques. Les mots d'ordre sont la recherche du sens caché des concepts mathématiques et leur unification sous le principe fédérateur de carré commutatif, une autre forme

le cas particulier des dualités algèbre-géométrie, on a affaire à un isomorphisme entre un concept et un percept [12], entre une construction intellectuelle et une perception sensorielle. L'objet mathématique se présente alors comme un contenu formel total mêlant aspects conceptuels et perceptuels, mêlant la force d'analyse du concept et, comme le disait Peirce [144], la « force de percussion du jugement perceptif ». Cet objet peut être qualifié de kantien ou pré-kantien dans le sens où, chez Kant, la construction des concepts s'effectue dans l'intuition pure (*a priori*, non empirique). Construire un concept est, pour Kant, soustraire l'objet intuitionné de la construction ostensive qui la sous-tend, pour lui substituer une construction symbolique. C'est dans l'intuition pure, explique Kant [102], que nous associons le triangle et l'angle plat ; c'est dans la construction symbolique que nous cherchons à le démontrer. On retrouve aussi, dans cette unité, quelque chose de la thèse wittgensteinienne selon laquelle, en tant que constructions grammaticales, les démonstrations donnent lieu à la saisie d'une image ou d'une forme. Pour Wittgenstein [194], les démonstrations symboliques tirent leur force de leur pouvoir de conviction géométrique. Une preuve mathématique doit être « synoptique » (*übersichtlich*) ; elle n'apporte rien de plus que ce qui préexiste dans le « royaume des entités géométriques ». Systématisée et symétrisée, cette posture prend la tournure néo-wittgensteinienne et néo-aristotélicienne de l'exacte traductibilité des preuves géométriques en preuves symboliques : la posture néo-aristotélicienne fournit la traduction injective (toute connaissance intuitive est linguistiquement ou symboliquement formulable), tandis que la posture néo-wittgensteinnienne fournit la traduction duale (toute démonstration symbolique est représentable par une preuve géométrique).

Sans aller jusqu'à ce point, qui systématise la traductibilité, notre thèse est que telle double-traductibilité est le signe d'un « contenu formel » marquant l'accès à un objet plus vaste, transcendant à la fois l'intuition géométrique et la preuve discursive qui la supporte. Cette thèse s'accepte donc *intuitionniste* [13] dans le sens où ces objets plus vastes ont en eux le jugement perceptif (mais ne s'y réduisent pas). Réciproquement, elle s'accepte *constructiviste*, dans le sens où ces contenus formels chargés d'intuition sont textuellement, symboliquement *construits*. Et elle s'accepte enfin *génétique* car la dialectique entre la *morphé* et le *logos* ne permet pas seulement de cartographier les contenus formels déjà-là ; elle permet de créer de nouveaux contenus, de ramifier les contenus déjà introduits. Ce dernier aspect est également wittgensteinien. Rappelons que, pour Wittgenstein, les démonstrations sont présentées comme « des faits de synthèse fabriquant de nouvelles connexions » ([194], III, §31, voir aussi Chauviré [30] p. 300 et [31] p. 214). Même si le philosophe viennois reste vague sur cet aspect génétique [14], Wittgenstein éclaire le fait que les

de symétrie. Là aussi, la recherche de « naturalité » n'est jamais très loin, comme l'illustre le concept catégorique de transformation naturelle. Dans les années 2000, Girard inaugure avec la géométrie de l'interaction une nouvelle approche de la logique qui radicalise les travaux de Gentzen, autour de l'approfondissement des symétries.

12. Les termes de concept et percept sont à manier avec précaution. Le terme percept, en particulier, ne renvoie pas à la définition qu'en donne Deleuze ([39], p. 154).

13. On prendra soin de différencier cet intuitionisme-là — kantien — de l'intuitionnisme brouwerien, qui lie l'existence des objets mathématiques à une instantiation réelle (un témoin).

14. Par exemple, dans les *Recherches Philosophiques* ([196] p. 131), l'arithmétique est une sorte de « géométrie plus générale ». Wittgenstein étend donc l'intuition à des synthèses grammaticales, alors que chez Kant l'intuition est liée à l'espace. Ce faisant, les « connexions de l'image » sont aussi symboliques. Il n'y a pas d'opposition entre connaissance symbolique et connaissance intuitive comme chez Leibniz.

connexions établies dans la démonstration créent des concepts qui étendent le langage. Cette création de concepts nourrit en premier lieu la grammaticalisation. Mais elle peut également nourrir une forme d'abstraction qui n'est pas exactement du ressort de la grammaticalisation, mais plutôt de la capacité qu'ont nos démonstrations à dégager des objets plus généraux.

La dualité entre *morphé* et *logos* n'est donc pas seulement une propriété permettant d'éclairer des objets mathématiques figés. L'histoire des mathématiques a amplement démontré qu'elle permet de guider la recherche de contenus formels toujours plus généraux. Dans les allers-retours entre axiomatisation et représentation, créateurs de nouvelles connexions, ce ne sont pas seulement les modes d'accès à l'objet mathématique qui sont questionnés, c'est aussi la nature même de l'objet, comme appartenance à une espèce d'objets plus vaste. Il s'agit là d'un autre enseignement majeur de l'activité mathématique, qui souligne qu'un autre processus d'abstraction fait son oeuvre, non en direction de l'axiomatisation mais en direction de la généralisation.

1.4 L'abstraction généralisante

Les exemples donnés précédemment ne doivent pas laisser penser que l'axiomatisation et l'exemplification sont des activités rigoureusement cloisonnées. Les processus d'abstraction ne sont jamais instantanés. Il suffit de reprendre nos exemples sous un angle davantage historique pour constater que l'abstraction peut s'inscrire dans le temps long, pour prendre le temps de questionner la nature du visuel et du scriptural en scène, réinventant au besoin les rôles.

C'est d'abord le cas en algèbre géométrique. Chez Viète [186], le scriptural n'est encore qu'un calcul littéral. Il y a bien, pour la première fois, une esquisse de lien entre le visuel géométrique et le calcul algébrique (vectoriel), mais le premier n'est pas encore émancipé du second, dans le sens où le calcul n'est pas encore exploité pour résoudre des problèmes géométriques. Le calcul devient véritablement autonome autour de 1630, avec les avancées quasi-simultanées de Ghetaldi [65], Fermat [53] et Descartes [42]. C'est à cette époque seulement que le calcul apparaît comme un véritable mode de présentation dual des résolutions géométriques pures (« synthétiques »). Cette dualité apparaît ensuite plus complètement avec Leibniz [119], qui invente la géométrie affine ; le calcul vectoriel devenu calcul barycentrique permet alors d'interpréter les applications affines et la convexité, en « oubliant l'origine » des espaces vectoriels, c'est-à-dire en se passant de repère cartésien.

La dualité est parachevée par Graßmann [77], qui dégage des structures géométrico-algébriques encore plus générales permettant d'interpréter les notions de longueur, d'angle, de parallélépipède, grâce à une généralisation des dimensions des entités géométriques manipulées (espaces et sous-espaces vectoriels) et une généralisation du calcul des entités géométriques (produit scalaire, produit vectoriel, produit extérieur). Clifford [33] généralisera encore un peu plus la théorie quelques années plus tard en ajoutant la théorie des formes quadratiques, permettant d'interpréter les rotations spatiales, grâce à la notion de nombre hypercomplexe. En deux siècles et demi, la dualité s'est ainsi généralisée pour englober des opérations visuelles de plus en plus riches.

Ce processus d'abstraction généralisante se retrouve en géométrie algébrique. Lorsque Riemann [150] invente les revêtements à plusieurs feuillets, c'est pour résoudre le problème d'ambiguïté des fonctions complexes multiformes. Mais cette approche sera étendue par Grothendieck [79] aux variétés algébriques de dimension quelconque, grâce à la notion catégorique de site. À la clé, cette généralisation débouche sur une dualité étendue englobant la notion d'espace topologique et celle de *locale*[15] : le treillis des ouverts de tout espace topologique ordonné par les inclusions est une algèbre de Heyting complète (*cf. infra* chap 2).

Dans le cas de l'algèbre de Boole, il faut remarquer que Stone [176] généralisa lui-même ses résultats sur les anneaux booléens et les idéaux maximaux à l'étude générale des treillis distributifs (une algèbre de Boole étant un treillis distributif complémenté). La généralisation de Stone fut à son tour étendue en une dualité plus vaste exploitant la théorie des topos. En effet, dans la mesure où Stone fait usage d'une forme de l'axiome du choix (le lemme de Zorn), sa démonstration ne peut pas être considérée comme constructive. Mais cet écueil sera bientôt contourné par la généralisation des espaces topologiques évoquée plus haut. En reformulant la dualité de Stone comme une dualité entre la notion de préordre et la notion de locale, les successeurs de Stone sont parvenus à une dualité plus générale et plus constructive. On remarque au passage que l'abstraction généralisante crée des points de convergence entre des domaines différents, puisque la logique post-booléenne a fini par rejoindre l'analyse fonctionnelle.

En théorie des types, le lambda-calcul nous donne un autre exemple d'abstraction généralisante. Le lambda-calcul simplement typé est un calcul formalisant la théorie des types simples. Il se compose de deux types de base, le type o des propositions et le type ι des objets élémentaires. Le lambda-calcul simplement typé se compose également de trois genres de lambda-termes : les variables (x,y,...), les applications ((u)v, où u et v sont des lambda-termes) et les abstractions ($\lambda x.v$, où x et u sont respectivement une variable et un lambda-terme). La théorie des types définit les contextes logiques qui permettent de définir la dérivabilité des jugements, mais une question reste en suspens : quelles variables a-t-on le droit d'utiliser dans les dérivations ? Dans la version de Church [32], la théorie des types simples est soumise à un contexte de typage, appelé signatures. Le contexte de typage noté Σ dresse la liste des variables bien typées acceptées dans les dérivations logiques : $\Sigma := x_1 : \tau_1, ..., x_n : \tau_n$. Nous avons alors deux types de jugements fondamentaux, un jugement de typage noté $\Sigma \vdash \Gamma$ ctx (dans la signature Σ le contexte Γ est bien formé) et un jugement purement logique noté $\langle\Sigma\rangle\ \Gamma \vdash A$ (dans la signature Σ et sous les hypothèses Γ, on a A). Dans ce cadre, le contexte de typage ne canalise pas seulement les dérivations logiques et le lambda-calcul associé ; il peut enrayer la dérivabilité pour des dérivations pourtant simples et intuitives. Par exemple, si la proposition A est dérivable dans le contexte Γ, nous pouvons nous attendre à ce qu'elle le soit dans le contexte élargi $\Gamma' \supset \Gamma$. Or dans la théorie des types de Church, tout contexte logique doit être bien formé. La proposition A n'est donc dérivable dans le contexte Γ', que si Γ' est lui-même bien formé. Si c'est le cas, on peut appliquer la règle dite de l'affaiblissement généralisé, énonçant que si $\langle\Sigma\rangle\ \Gamma \vdash A$, $\Sigma \vdash \Gamma'$ ctx et $\Gamma \subset \Gamma'$, alors $\langle\Sigma\rangle\ \Gamma' \vdash A$. Ce nécessaire contrôle de l'hérédité du bon typage ne se pose pas dans la théorie des types de Curry, car les contextes de typage n'y sont pas explicités. La théorie de Curry [35] est en ce sens plus abstraite que celle de Church, car elle ne contingente pas le type des variables et des contextes logiques.

15. La catégorie $\mathcal{L}oc$ des locales est une catégorie dont les objets sont les algèbres de Heyting complètes et dont les morphismes sont des correspondances continues.

Il faut donc retenir qu'une autre idée d'abstraction est en oeuvre dans le développement des mathématiques, non l'abstraction-axiomatisation déjà explicitée, mais une abstraction-généralisation. Ceci nous amène à distinguer une abstraction subsomptive et une abstraction formelle. On est également tenté d'y voir une distinction entre « abstraction matérielle » et « abstraction formelle », mais à condition de la départir de la distinction husserlienne entre abstraction généralisante matérielle et abstraction formalisante. Si l'abstraction matérielle apparaît bien chez Husserl comme une tentative de subsomption par un concept surplombant, c'est pour opérer sur un donné réel — des *concreta* — qui fait déborder l'abstraction matérielle dans un registre empirique. Il faut donc comprendre que notre abstraction subsomptive « matérielle » n'est pas une abstraction généralisante au sens d'Husserl, car elle opère déjà sur un donné *idéel*, un idéel qui s'offre à se « matérialiser » dans la géométrie. Elle n'est pas une abstraction formalisante pour autant, pas plus que notre abstraction formelle, car l'abstraction formalisante est pour sa part renvoyée dans le champ des actes de pensée (ou d'actes de conscience), ce qui fait ici déborder la prestation de représentation dans le registre psychologique et cognitif de l'intentionnalité [16].

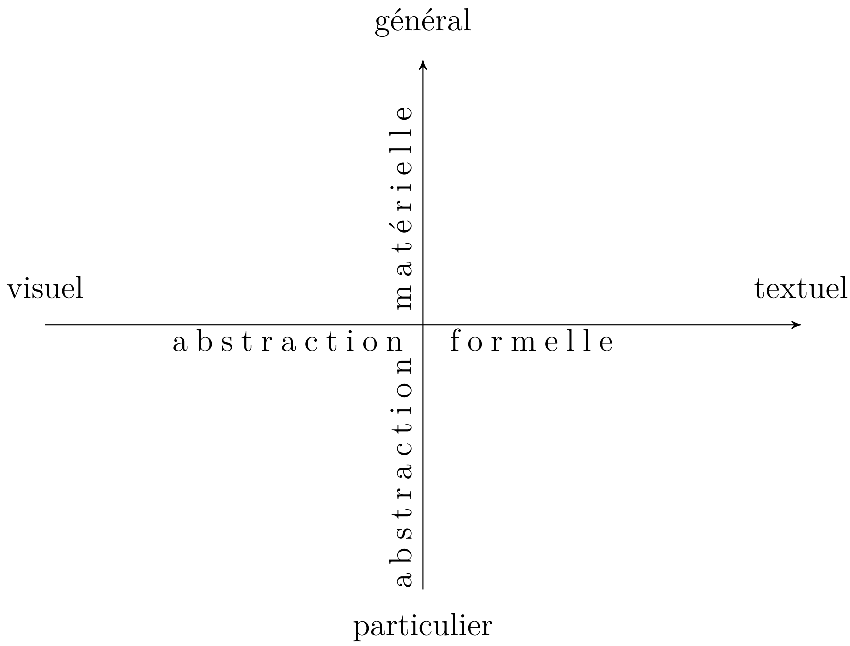


FIGURE 1.2 – Abstraction matérielle et abstraction formelle

Ces quelques illustrations historiques montrent que l'une ne va pas sans l'autre. L'activité mathématique est pour beaucoup une activité de classification. Cette activité consiste à généraliser des résultats en rassemblant des objets mathématiques présentant des similitudes, un « air de famille ». À l'époque des Anciens, l'effort d'abstraction et de généralisation portait sur des objets particuliers (par exemple le rectangle comme parallélogramme particulier, le parallélogramme comme quadrilatère particulier, le quadrilatère comme polygone particulier, etc.). Ce qu'ont introduit

16. On distinguera quand même le Husserl de la *Philosophie de l'arithmétique* [93] du Husserl des *Recherches Logiques* [94]. Si l'on suit Brisart [22], le jeune Husserl perçoit encore l'abstraction formalisante que comme une simple intention, elle sera renforcée plus tard comme idéation dans les *Recherches Logiques*.

les Modernes, c'est une généralisation d'emblée formelle (par exemple la logique intuitionniste comme cas particulier de la logique classique, la logique minimale comme cas particulier de la logique intuitionniste).

En retour, une fois acquise, la généralisation permet de générer de nouveaux exemples qui, à leur tour, peuvent permettre de suggérer de nouvelles généralisations. Dans ce contexte, l'abstraction se manifeste par l'abandon des hypothèses qui ont guidé l'activité mathématique antérieure. Citons ces abandons : l'abandon des entités géométriques (la géométrie analytique de Descartes, Fermat), l'abandon des repères des espaces vectoriels (géométrie affine de Leibniz), l'abandon de la spécificité des objets manipulés (le calcul vectoriel général de Graßmann), l'abandon de la forme quadratique sous-jacente (l'algèbre de Clifford), l'abandon du typage des contextes (théorie des types).

Généraliser c'est ainsi « faire abstraction de quelque chose ». Mais de quoi précisément ? À ce stade, le processus d'abstraction donne lieu à l'extension d'au moins trois connaissances : celle des objets, celle des opérations agissant sur les objets, et celle des liens entre les objets et les opérations. Un exemple simple d'extension du domaine des objets est celui des nombres ; c'est le processus qui fait passer des entiers aux réels, puis aux nombres complexes, etc. Souvent, l'extension du domaine des objets oblige à repenser de manière coextensive le domaine des opérations. C'est le cas quand on considère les nombres comme cas particuliers des vecteurs, eux-mêmes cas particuliers des matrices, puis des tenseurs. L'extension du domaine des objets transporte avec elle la coextension du domaine des opérations : le produit vectoriel, le produit matriciel, le produit tensoriel, etc. Ce double mouvement d'extension-coextension renvoie à ce que Cavaillès [27] appelle « paradigme ».

Mais la dynamique de l'abstraction généralisante ne se résume pas à des « abandons », à ce que Cavaillès appelle le « moment de la variable » ; cette dynamique s'accompagne d'une activité diagonale de production de nouveaux objets, que Cavaillès appelle « thématisation ». Mais avant d'y venir, remarquons d'abord que la généralisation de certains objets peut faire émerger de nouvelles opérations qui ne sont pas coextensives. C'est par exemple le cas des vecteurs (par rapport aux nombres), qui nous invite à introduire de nouvelles opérations comme le produit intérieur, le produit extérieur ou le produit scalaire.

1.5 La thématisation

L'abstraction généralisante ne transporte pas seulement les objets et les opérations. Au delà de l'extension des objets et de la coextension des opérations associées, l'abstraction fait surgir de nouveaux objets qui ne peuvent se comprendre qu'à partir des nouvelles opérations corrélativement étendues. L'abstraction généralisante prend alors une forme « surrective » que Cavaillès nomme *thématisation*. La section précédente ayant succinctement présenté le concept de paradigme, nous portons maintenant notre attention sur la thématisation.

La théorie des groupes fournit un exemple de thématisation particulièrement intéressant, pour la place qu'elle tient dans l'histoire des mathématiques. Le passage des groupoïdes aux groupes est acquis lorsque l'on fait abstraction de l'idée d'état, pour ne garder que l'idée de mouvement. Soit la structure algébrique des arrangements de trois lettres :

$$\{(a, b, c); (b, c, a); (c, a, b); (a, c, b); (c, b, a); (b, a, c)\}$$

munie de la loi de passage $\circ$ (loi de composition interne) de deux arrangements. Cette structure n'est pas un groupe. Le résultat de la composition des arrangements

$$(((a,b,c) \to (b,c,a)) \circ ((b,c,a) \to (a,c,b))) \circ ((a,c,b) \to (a,b,c))$$

est pourtant le même que le résultat de la composition

$$((a,b,c) \to (b,c,a)) \circ (((b,c,a) \to (a,c,b)) \circ ((a,c,b) \to (a,b,c)))$$

Mais, pour être un groupe, encore faut-il que $\circ$ soit défini pour tout élément du groupe. Or, ce n'est pas le cas. Ce n'est le cas que si nous faisons abstraction des lettres. Si nous regardons maintenant les groupes de permutations en fonction de la seule position des lettres, nous observons que les 36 passages possibles d'un arrangement à un autre peuvent être regroupés en 6 passages « abstraits » :

$$\begin{gathered}
(x,y,z) \to (x,y,z)\\
(x,y,z) \to (y,z,x)\\
(x,y,z) \to (z,x,y)\\
(x,y,z) \to (x,z,y)\\
(x,y,z) \to (z,y,x)\\
(x,y,z) \to (y,x,z)
\end{gathered}$$

Dans ce contexte, toute composition est maintenant définie. Nous pouvons composer $(x,y,z) \to (y,z,x)$ avec $(x,y,z) \to (y,z,x)$ puisque, par simple renommage, $(x,y,z) \to (y,z,x)$ est structurellement équivalent à $(y,z,x) \to (z,x,y)$, de sorte que $((x,y,z) \to (y,z,x)) \circ ((y,z,x) \to (z,x,y)) = (x,y,z) \to (z,x,y)$. Le regroupement des compositions par classe d'équivalence laisse ainsi apparaître un objet — ici un groupe — élaboré à partir d'opérations — ici des permutations. Certains objets mathématiques sont ainsi des entités déjà sédimentées par des opérations.

Cette sédimentation des opérations dans les objets est tout aussi manifeste dans la théorie de la démonstration et le lambda-calcul. Par exemple, la règle de la coupure s'énonce de la façon suivante :

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, \neg A}{\vdash \Gamma, \Delta}\,(\mathrm{Cut})$$

Mais cette règle devient surtout intéressante quand on cherche à l'appliquer à des propositions non atomiques. Imaginons que A ne soit pas un atome mais une proposition conjonctive signifiant $B \wedge C$. Dans ce cas, suivant la loi de de Morgan, $\neg A$ est une proposition disjonctive signifiant $\neg B \vee \neg C$), si bien que la dérivation logique devient :

$$\frac{\dfrac{\vdash \Gamma, B \qquad \vdash \Gamma, C}{\vdash \Gamma, B \wedge C}\,(\wedge) \qquad \dfrac{\vdash \Delta, \neg B, \neg C}{\vdash \Delta, \neg B \vee \neg C}\,(\vee)}{\vdash \Gamma, \Delta}\,(\mathrm{Cut}) \tag{1.1}$$

La coupure, qui opère maintenant sur un objet plus général qu'une simple proposition atomique, est donc elle aussi plus générale : elle possède un degré (la complexité de la formule de coupure) et une hauteur (la somme des hauteurs des dérivations prémisses). Cette généralité se manifeste aussi à travers la multiplicité des systèmes de coupures : pour une preuve donnée (ici une preuve de Γ, Δ), il existe plusieurs façons de construire les « détours logiques » (i.e. l'arbre de preuve). Pour démontrer une même conclusion, certaines dérivations logiques sont plus explicites que d'autres, faisant apparaître plus de coupures. Par exemple, la preuve 1.1 peut se normaliser et se réécrire

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \Gamma, B \qquad \vdash \Gamma, \neg B, \neg C}{\vdash \Gamma, \neg C}\,(\mathrm{Cut}) \qquad \vdash \Delta, C}{\vdash \Gamma, \Delta}\,(\mathrm{Cut}) \tag{1.2}$$

permettant d'obtenir la conclusion directement à partir des prémisses $B, \neg B, \neg C$ et C, aux coupures près (sans avoir recours à la conjonction et à la disjonction).

Se dégage alors l'idée d'invariance de la preuve par élimination des détours logiques. Formellement autorisée par le théorème d'élimination des coupures [17] de Gentzen [63], cette invariance fait surgir un objet nouveau : la preuve normalisée « sans coupure », abstraite de tout détour de raisonnement.

Ce nouvel objet reçoit par ailleurs une autre caractérisation dans le lambda-calcul. En vertu de la correspondance Curry-Howard [18], la normalisation des preuves se traduit par la normalisation des termes du lambda-calcul. Un λ-terme (i.e. une preuve) est dit en forme normale si aucune β-réduction [19] ne peut lui être appliquée. Par exemple le terme $(\lambda x.x)y$ se normalise en y. Les nouveaux objets ainsi définis permettent alors de développer la théorie sur de nouvelles bases, par exemple en affectant un sens commun à plusieurs preuves ou programmes possédant la même forme normale ; cette exploitation sémantique des invariants est précisément au centre de la sémantique dénotationnelle (*cf. infra* chap. 3).

Nous pourrions multiplier les exemples de thématisation, pour montrer son omniprésence dans les mathématiques. Nous nous contenterons d'en mentionner très brièvement un dernier, eu égard à son ambition généralisatrice (et même unificatrice) : la théorie des catégories. S'il est en effet un domaine où la thématisation est reine, c'est bien la théorie des catégories (ce qui ne surprendra personne, puisque c'est l'une de ses raisons d'être). Rappelons en effet qu'un foncteur, qui n'est rien d'autre qu'un morphisme de catégories, peut se voir aussi comme un objet (un objet de la catégorie des foncteurs). Il en va de même avec les transformations naturelles, qui ne sont rien d'autre que des morphismes de foncteurs [20]. On en conclut que l'abstraction généralisante emprunte des chemins parfois sinueux, où l'extension des opérations ouvre parfois de nouveaux espaces d'investigation, peuplés de nouveaux objets.

Mais la thématisation devient encore plus intéressante lorsque l'abstraction matérielle dont elle procède rencontre l'abstraction formelle dont il était question en ouverture de ce travail. Le processus de surrection débouche alors explicitement sur

17. Ce théorème établit qu'une preuve faisant usage de la règle de la coupure peut s'en dispenser, en calcul des séquents ou en déduction naturelle (*cf. infra* chap. 3).

18. La correspondance de Curry-Howard, établit une correspondance entre les notions logiques de formule (resp. preuve) et les notions de type (resp. terme ou programme) prévalant en théorie de la calculabilité (d'où les noms alternatifs de correspondance preuve/programme ou correspondance formule/type). Cette correspondance fut d'abord formulée par Curry [35] comme correspondance entre un système axiomatique à la Hilbert et la logique combinatoire, puis par Howard [91] comme correspondance entre le fragment implicatif de la déduction naturelle et le lambda-calcul simplement typé.

19. Brièvement, la β-réduction est le processus de simplification d'un terme (une application) de la forme $(\lambda x.y)z$ pour la transformer en une variante de l'expression y dans laquelle toute occurrence libre de x est remplacée par y, notée $y[z/x]$.

20. La théorie des catégories possède même des objets mêlant d'emblée objets et opérations : les n-catégories, équipées de morphismes de morphismes, de morphismes de morphismes de morphismes, etc.

une dualité entre opérations algébriques et objets spatiaux. Un exemple emblématique de pareille thématisation nous est donné par les systèmes de spatialité. En remarquant, à l'instar de Cayley [28], que les propriétés géométriques des figures d'un espace restaient stables par certaines transformations, Klein [105] énonça un programme — le programme d'Erlangen — visant à ramener l'étude des différentes géométries à celle de leurs groupes de transformation. Dans le programme d'Erlangen, une géométrie comme ensemble de figures est obtenue comme l'action d'un groupe G, dit principal, sur un espace A. Dans ce contexte, un nouvel objet géométrique peut être obtenu par le lieu des points de A invariants par l'action d'un sous-groupe de G. Un tel enchevêtrement entre opérations et objets s'est avéré extrêmement fécond, puisqu'il a permis d'élaborer une classification des géométries euclidienne et non-euclidiennes (géométries d'ordre supérieur).

La thématisation apparaît ainsi comme le compagnon de jeu indispensable du paradigme, car elle donne plus de profondeur à la conceptualisation mathématique, ce qui est primordial pour connaître l'essence des objets mathématiques. On a longtemps cru, dans l'esprit de la géométrie analytique, que l'analyse suffisait à comprendre la nature des objets. C'était oublier leur environnement théorétique. Connaître l'objet, c'est aussi connaître ses relations à d'autres objets qui présentent un air de famille ou un caractère héréditaire [21]. Il faut donc que la formalisation déborde de l'objet, car l'objet ne se comprend jamais mieux qu'au terme d'une classification bien comprise. Seule une clairvoyance subsomptive verticale peut faire la part des choses entre « les attributs essentiels et les accidents d'un être », comme l'exprimait élégamment Vuillemin ([187], p. 389).

Tels sont les bienfaits, sur l'abstraction généralisante, d'une réflexion en termes d'objets, d'opérations et de leur interpénétration. Mais cet angle de vue laisse aussi en suspens de nombreuses questions. Dans quelles mesures les surrections consubtancielles à la thématisation changent l'essence de la pensée mathématique ? Quels rapports l'abstraction matérielle entretient précisément avec l'abstraction formelle ? Les deux abstractions se nourrissent-elles l'une l'autre ? Cavaillès pouvait difficilement répondre à ces questions, puisqu'il périt pendant la guerre, avant que les principaux outils d'intelligibilité soient découverts. Les mathématiques changent en effet d'époque au tournant des années cinquante, à la faveur de l'émergence de nouvelles branches des mathématiques : la théorie des faisceaux, la théories des algèbres d'opérateurs ou encore la théorie des catégories. La présente thèse se propose d'approfondir philosophiquement l'une de ces questions : le rapport entre abstraction généralisante (subsomptive, matérielle) et l'abstraction axiomatisante (formelle).

1.6 Ruptures paradigmatiques

Que faut-il retenir du processus d'abstraction en mathématique ? Que les objets des mathématiques habitent un espace à deux dimensions (cf. figure 1.2). La dimension « horizontale » donne le mode de donation, ou de (re)présentation de l'objet, la dimension « verticale » son mode d'individuation. L'essence des objets ne peut se réduire à une seule caractérisation ; les objets sont à la fois représentés et individués.

Pour l'instant, nous nous sommes bornés à remarquer que l'abstraction matérielle s'accompagne parfois d'une abstraction formelle, en donnant quelques exemples. Mais cette remarque est plutôt anecdotique quand on s'interroge sur l'essence des objets.

21. « Dis moi qui sont tes amis, je te dirai qui tu es »

Si l'on consent que la quête d'axiomatisation porte avec elle l'empreinte d'un contenu formel, si l'on se souvient que cette quête est créatrice de nouvelles espèces d'objets, le point essentiel est, selon nous, de questionner le sens ontologique et épistémologique de ces contenus formels, de ces nouvelles espèces d'objets. Il est légitime de supposer que l'émergence de toute nouvelle espèce s'accompagne de nouvelles *qualités* (en tant que propriétés générales des objets leur appartenant). Mais où se dirige ce mouvement qualitatif ? Et comment se dirige-t-il ? Continûment ou par sauts ?

Nous sommes fondés à penser que ce double processus d'abstraction va dans le sens d'une *dé-essentialisation*. Mais encore faut-il éclairer le sens de cette dé-essentialisation ainsi que son rapport à la *morphé* et au *logos*. Pour aborder ces questions, essayons d'identifier le sens commun des qualités possédées par les nouveaux objets, dans leurs diversités régionales.

En analyse harmonique, les travaux de Weyl [58] sur les représentations linéaires des groupes compacts permettent d'ouvrir un nouveau chapitre théorie des représentations. L'analyse harmonique non commutative de Weyl a permis de poser la question de la définition d'un groupe compact à partir de la classe de ses représentations linéaires finies. Sous l'impulsion de Grothendieck [80], cette question connue sous le nom de « problème de Tannaka » conduira à la théorie plus large des groupes de Galois motivique, dont l'idée est de généraliser la théorie de Galois en exploitant l'équivalence entre la catégorie des représentations du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ et la catégorie des k-variétés projectives lisses de dimension 0 munie du produit tensoriel des variétés.

Mais les ramifications de la théorie des représentations des groupes iront en définitive bien au delà de la théorie des groupes. Les outils de classification conçus pour les groupes sont devenus si généraux qu'ils ont pu facilement s'exporter à d'autres structures, en particulier aux algèbres. Deux approches feront en particulier école, celle de von Neumann et celle de Gelfand. Pour von Neumann [136], la motivation était de généraliser la théorie des représentations des groupes unitaires dans la perspective de donner des fondements mathématiques à la mécanique quantique naissante. Von Neumann avait montré que toute W*-algèbre, c'est-à-dire toute algèbre stellaire d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, fermée pour la topologie faible, et contenant l'opérateur identité, est isomorphe à une intégrale directe d'algèbre dont le centre [22] est réduit aux scalaires. Von Neumann avait ainsi montré que la classification des W*-algèbres (les algèbres de von Neumann) pouvait se limiter à l'étude d'un nombre fini d'algèbres appelées facteurs, en lesquels les W*-algèbres admettent une décomposition unique.

La théorie de von Neumann est particulièrement adaptée à la mécanique quantique dans le sens où les W*-algèbres sont des algèbres « concrètes », c'est-à-dire des algèbres dont les éléments sont des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert. Mais il existe un point de vue abstrait, développé par Gelfand et son école, considérant le cas plus général des C*-algèbres, c'est-à-dire des algèbres de Banach involutives. Après que Riesz [151] eut établi, dès 1909, un important théorème de représentation des espaces topologiques compacts, en leur associant l'algèbre stellaire commutative des fonctions continues à support compact, Gelfand [61] [62] découvrit que, réciproquement, à toute algèbre stellaire commutative peut être associé son spectre qui est un espace topologique compact.

22. Le centre d'une structure algébrique est l'ensemble des éléments de cette structure qui commutent avec tous les autres éléments.

Du côté de la géométrie algébrique, Grothendieck [79] réalise une autre avancée décisive. Cherchant à généraliser la notion de surface de Riemann aux variétés algébriques de dimension quelconque, Grothendieck introduit la notion catégorique de site. Il comprend alors comment la notion de faisceau, formalisée par Cartan [166], peut être transposée sur les sites, permettant de comprendre algébriquement un espace topologique, muni de ses ouverts, à partir de ses préfaisceaux. C'est ce que Grothendieck appellera les topos de faisceaux, qui sont depuis essentiels en géométrie algébrique.

Autour des années 2000, la logique découvre elle aussi une nouvelle dimension. Jusque là, la théorie de la démonstration envisageait la preuve comme différentes étapes d'explicitation d'une formule (ou, selon la correspondance dite de Curry-Howard (*cf. supra*), différentes étapes de normalisation des termes d'un calcul), ce qui conduit à des preuves « analytiques » [23] à la Gentzen. Mais, alors qu'il invente la logique linéaire (*cf. infra*, chap 3), Girard [67] remarque que le critère de correction des réseaux de preuves linéaires fait apparaître une dualité entre la preuve non typée (l'ensemble des liens axiomes) et son typage (le réseau de preuve moins les axiomes). Il lui vient alors l'idée de représenter les preuves en termes de permutations dans un réseau de preuve : une preuve est correcte si la permutation associée aux axiomes du réseau est orthogonale à la permutation associée au typage (correct).

Nous pourrions ajouter d'autres exemples, issus d'autres branches des mathématiques, mais arrêtons-nous ici et essayons d'en dégager le sens commun. Dans ces exemples, nous constatons que les changements de perspective procèdent d'une même rupture paradigmatique [24] : dans tous les cas, tout se passe comme si on inversait le rôle de la fonction et celui de la variable : au lieu d'observer une fonction comme fonction fixe d'un point variable, on observe un point fixe dont on considère son image par une fonction variable.

- En analyse harmonique, le changement de perspective est justifié par l'aspiration à reconstruire tout groupe compact à partir de l'ensemble de ses représentations linéaires (de dimension finie), c'est-à-dire à partir des applications linéaires compatibles avec les actions du groupe (problème de Tannaka).

- En analyse fonctionnelle, le changement de perspective est justifié par l'aspiration à reconstruire tout espace X (topologique, mesuré, ou riemannien) à partir de l'ensemble de toutes les fonctions définies sur cet espace, soit à partir des fonctions mesurables bornées sur X (espaces mesurés), soit à partir des fonctions continues sur X (espaces topologiques), soit à partir des fonctions lisses sur X (espaces riemanniens).

- En topologie algébrique, le changement de perspective est justifié par l'aspiration à reconstruire un ensemble X à partir du treillis de ses ouverts, pour aboutir à la notion de topos de préfaisceaux.

23. Selon la terminologie empruntée par Joinet [98] s'inspirant de Wittgenstein [195]

24. L'emploi du terme paradigme doit être précisé, car il ne renvoie pas au sens employé par Cavaillès. Nous ne l'employons pas non plus dans le sens dilthien de « vision du monde » (*Weltanschauung*), ni dans le sens kuhnien de « protocole scientifique » (*Disziplinäre Matrix*), ni dans sens foucaldien de « système de représentations » (*épistémè*). Nous voulons simplement lui donner le sens de *représentation logico-formelle*, plus proche de l'idée d'« agencement de concepts ». Ce faisant, le sens que nous employons est plus large que celui de Cavaillès mais plus restreint que celui de Kuhn.

- En logique mathématique, le changement de perspective est justifié par l'aspiration à reconstruire la notion de type à partir d'une algèbre de permutation ou d'injections partielles (géométrie de l'interaction), grâce au recentrage de la théorie de la démonstration sur l'élimination des coupures.

Ces changements de perspective ont ceci en commun qu'ils forcent la reconstruction d'un objet donné à partir d'un ensemble d'actions sur cet objet : un groupe, un espace (topologique, mesuré, ou riemannien), un ensemble, un type, etc, à partir d'applications linéaires, de fonctions (mesurables, continues, ou lisses), d'un treillis d'ouverts, d'injections partielles, etc. Selon nous, il faut y voir une rupture paradigmatique qui joue sur la dualité espace / action (ou objet / opération) pour reconstruire la notion d'espace à partir de la notion d'action. Sous cet angle, l'abstraction formelle (axiomatisante) nous apparaît maintenant comme une façon de replacer l'action au coeur de la pratique mathématique [25].

Il est frappant de noter que le parallèle entre l'analyse, la topologie et la logique ne se limite pas à cette rupture paradigmatique. Il faut en effet remarquer que les objets en considération sont déjà des observables abstraits ; ils sont le résultat d'un travail d'abstraction matérielle (d'une généralisation) sur des objets premiers que l'on peut qualifier de « naïfs ».

- La notion de groupe est déjà une abstraction matérielle de la notion naïve de groupoïde (au sens de magma), où l'on a abstrait l'idée d'état (*cf. supra*).
- La notion de fonction est déjà une abstraction matérielle de la notion naïve de point, où l'on a abstrait la notion de « grandeur ».
- La notion de site des ouverts est déjà une abstraction matérielle de la notion naïve d'espace topologique.
- Les systèmes formels à la Gentzen sont déjà une abstraction matérielle des systèmes formels axiomatiques à la Hilbert, où l'on a abstrait la notion de preuve [26].

On constate ici une autre rupture paradigmatique qui, pour sa part, joue donc sur l'abstraction matérielle pour généraliser le domaine des observables. Nous obtenons ce faisant l'enchaînement paradigmatique suivant :

objets concrets → objets matériellement abstraits → objets formellement abstraits

soit pour leur donner un nom :

$$\mathfrak{P}_1 \to \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_3 \tag{1.3}$$

Prenons le temps de détailler un peu cet enchaînement pour chacun des champs de recherche.

- En analyse, $\mathfrak{P}_1$ est représenté par les espaces mesurés, et correspond dans les mathématiques modernes à la théorie de la mesure. Il s'agit de suivre la transformation d'une figure géométrique en observant naïvement un invariant

25. « Au commencement était l'action » comme l'écrivait Goethe (*Faust*).
26. Les preuves pouvant être équivalentes à coupure près

(une aire, un volume, un périmètre, etc.), sans référence à aucune notion de fonction, comme pouvaient le faire les Égyptiens ou les Mésopotamiens (pour les problèmes d'arpentage par exemple). Le passage à $\mathfrak{P}_2$ correspond à un premier niveau d'abstraction essentiellement matérielle, où la notion de fonction d'une (ou plusieurs) variable(s) fait son apparition. Ce paradigme marque d'une certaine façon la véritable naissance des mathématiques, à laquelle peuvent être associés l'algorithme d'Euclide et le théorème de Thalès (en tant que premiers raisonnements abstraits fonctionnels). C'est à cette époque que le champ agricole laisse place à un rectangle abstrait (avec les notions fonctionnelles d'aire ou de périmètre), et que les méthodes d'exhaustion ancestrales font progressivement place aux premières formes de calcul différentiel (Archimède puis Viète puis Descartes)[27]. $\mathfrak{P}_3$ marque finalement l'apparition des *opérateurs* (comme fonctions de fonctions), décrivant un second niveau d'abstraction, plus formel. L'avènement du calcul fonctionnel et de la théorie spectrale a rendu cette apparition inévitable, en associant à toute algèbre, commutative ou non, un espace, via son spectre associé.

- En topologie, $\mathfrak{P}_1$ est représenté par les espaces topologiques. On rappelle qu'un espace topologique est un ensemble muni d'une topologie constituée de l'ensemble de ses ouverts. $\mathfrak{P}_2$ est représenté par la notion de revêtement, qui généralise la notion de surface de Riemann. La surface de Riemann a été introduite pour lever l'ambiguïté des fonctions algébriques « mal définies ». Pour y remédier, l'idée de Riemann fut de représenter la fonction non plus sur le seul plan complexe, mais de la déployer sur un revêtement à plusieurs feuillets. Dans les années 60, Grothendieck a proposé une généralisation catégorielle de cette approche. Tout espace topologique étant muni des « bonnes » propriétés de réunion et d'intersection, le treillis de ses ouverts définit un préordre permettant d'identifier une catégorie dont les objets sont les familles couvrantes et les morphismes les inclusions. Cette généralisation catégorique aboutit à la notion de *site*, qui est au treillis des ouverts ce que la surface de Riemann est à la fonction algébrique. Sur cette base catégorique, $\mathfrak{P}_3$ consiste à *construire* l'espace topologique à partir de la donnée catégorique du site. Il s'agit d'une opération de recollement de données locales (des préfaisceaux), pour obtenir la notion de *topos* (de Grothendieck), qui donne la règle de construction de l'espace topologique : c'est, *grosso modo*, la règle qui associe à chaque ouvert de l'espace topologique l'ensemble de ses préfaisceaux.

- En logique, $\mathfrak{P}_1$ est représenté par les systèmes formels centrés sur les *formules* : il s'agit de suivre la transformation d'une formule au cours de sa démonstration, en préservant naïvement sa valeur de vérité, sans explicitation fonctionnelle desdites transformations. Le passage à $\mathfrak{P}_2$ correspond à l'« analytisation » des preuves introduite par Gentzen (*cf. supra*), où les transformations sont maintenant vues comme des morphismes (ou des programmes, si l'on considère la correspondance de Curry-Howard) d'une preuve invariante aux coupures près. Enfin $\mathfrak{P}_3$ est décrit par le renversement des rôles de la preuve et de l'élimination des coupures. Plutôt que d'observer la preuve au cours de sa transformation (i.e. de l'élimination séquentielle des coupures), on observe l'orthogonalité (i.e. la coupure, redéfinie algébriquement comme une équation de rétroaction) des

27. Sur ce point, on lira avec intérêt les *Métamorphoses du calcul* de Dowek [47].

permutations induites par les axiomes et le typage (dans les premières versions de la géométrie de l'interaction). La construction de la notion de type est alors fondée sur l'opposition entre preuves généralisées (épreuves) : deux épreuves sont orthogonales si et seulement si leur produit est nilpotent.

Notons que le schéma (1.3) est bien incrémental. Chaque paradigme ne perd rien du paradigme précédent. Les objets formellement abstraits (i.e. les notions de groupe motivique, d'opérateur, de topos, de typage *a posteriori*, etc) récapitulent les objets matériellement abstraits (i.e. les notions de groupe, de fonction, de site, de preuve analytique à la Gentzen, etc), qui récapitulent eux-mêmes les objets concrets (i.e. les notions de groupoïde, de point, d'espace topologique, de preuve axiomatique à la Hilbert, etc).

Nous avons alors répondu (en moins en partie) à la question des rapports entre les deux abstractions, et préciser comment l'une pouvait se nourrir de l'autre. Sans qu'il soit possible de tirer de trop grandes généralités (pour d'autres processus d'abstraction que ceux relevant des ruptures $\mathfrak{P}_1 \to \mathfrak{P}_2$ et $\mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_3$), nous pouvons compléter la figure 1.2 en ajoutant le chemin emprunté par notre enchainement paradigmatique $\mathfrak{P}_1 \to \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_3$:

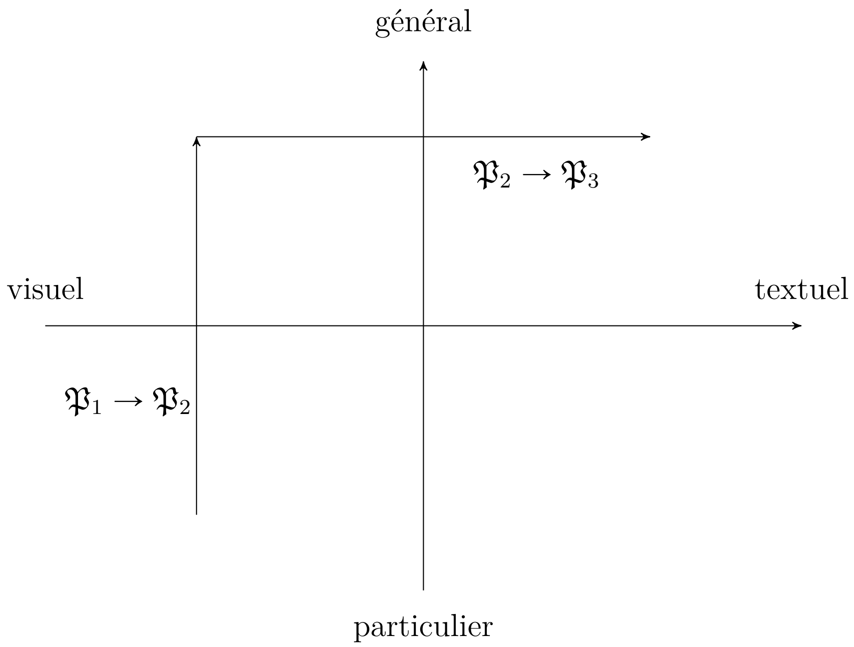


FIGURE 1.3 – L'enchaînement $\mathfrak{P}_1 \to \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_3$ dans le référentiel d'abstraction

1.7 La dualité formalisée

Les dualités espace / action que nous avons évoquées mettent en jeu des objets mathématiquement bien identifiés. Par exemple un ensemble bien déterminé de figures avec l'action d'un groupe de transformations bien déterminé (programme d'Erlangen), ou une fonction algébrique bien déterminée avec un revêtement à plusieurs feuillets bien déterminé (géométrie différentielle). Dans tous les cas, les objets en jeu sont rigoureusement mathématisés. La bonne fixation des pôles de la dualité a pour conséquence de fixer conceptuellement le sens de la dualité. Mais celui-ci est-il pour autant clairement identifié à son tour ? Suit-il un modèle mathématique unique ? Il ne suffit pas d'associer un espace clairement défini avec une action ou un ensemble d'actions clairement défini, il faut aussi traiter la dualité comme un objet mathématique à part entière. En d'autres termes, il convient d'identifier clairement la ou les notions de *dual* que mettent en jeu les espaces et les actions.

Bien que la philosophie des mathématiques jette étonnamment peu de lumière sur ces dualités en tant que telles, l'histoire contemporaine des mathématiques donne à voir essentiellement deux réponses à ces questions. Selon Lawvere et Rosebrugh [114], deux types de dualité tendent à se dégager : une dualité formelle et une dualité concrète (on prendra soin de ne pas confondre dualité formelle et abstraction formelle, de même que dualité concrète et objet concret). Comme le suggèrent Krömer et Corfield [107], cette distinction n'est pas sans rappeler la dualité axiomatique *vs.* fonctionnelle pointée par Mac Lane [122] et Buchsbaum [23] (on prendra soin ici de ne pas confondre dualité axiomatique et abstraction axiomatisante). Un exemple typique de dualité concrète est la dualité, rencontrée en géométrie projective, entre les sous-espaces de dimension r et les sous-espaces de dimension $n - r - 1$, dans un espace de dimension n (qui généralise la dualité entre les points et les droites dans la géométrie euclidienne). En algèbre, les lois de de Morgan, qui établissent les règles de passage entre les connecteurs logiques (mais aussi entre les quantificateurs logiques), nous donnent une dualité similaire. Dans les deux cas, nous avons affaire à une dualité « concrète » dans le sens où une nouvelle relation est créée lors d'une exponentiation des objets existants par un objet dualisant. Cette exponentiation créé un nouveau diagramme qui inverse le sens de la relation initiale, ce qui, ce faisant, rend le nouveau diagramme dual du diagramme initial.

On remarque cependant que cette dualité ne décrit pas exactement ce que vise la thèse. Elle exprime plutôt une stratégie que Detlefsen [43] qualifie de « deux théorèmes par preuve » (*two theorems for one proof*) : une fois le théorème établi, la stratégie d'exponentiation (par un objet bien choisi) fournit gratuitement un théorème dual. Le prix à payer, c'est que les objets originaux sont perdus ; le théorème dual opère sur des espaces fonctionnels (des ensembles de fonctions) et non plus sur les ensembles dont les espaces sont le support. Il ne s'agit donc pas de porter un double regard sur un objet, mais de créer un nouvel objet dérivé. Cette approche de la dualité est très différente de celle qui est à l'oeuvre chez Stone, Gelfand ou Grothendieck. Ces derniers avancent *a contrario* une dualité formelle. À rebours de la dualité concrète, la dualité formelle ne crée pas de nouveau diagramme ; elle n'introduit pas d'objet dualisant exponentiant la dualité initiale. Elle inverse simplement, *formellement*, le sens de la relation liant les objets duaux. De ce fait, la dualité formelle n'est pas créatrice d'entité mais d'identité. C'est le point essentiel. En apparence superficiel, ce renversement purement formel du lien entre les objets duaux est en réalité crucial pour donner aux objets cette identité profonde qui leur confère le statut de *contenu* (formel). Le fait de renverser le lien entre les duaux plutôt que de l'exponentier a pour conséquence d'approfondir les objets par rapport à leur mode de présentation (du concret vers l'abstrait) et de représentation (de l'abstrait vers le concret). C'est dire que la dualité devient bien un critère d'identification. On ne met plus seulement en dualité les objets, mais aussi leur mode de connaissance. En dualisant de la sorte les accès épistémiques aux objets, on leur imprime habilement une marque ontologique. Ce qui fonde un objet mathématique (et sa connaissance), c'est le fait de lui trouver un accès vers le concret depuis l'abstrait, et un accès vers l'abstrait depuis le concret et, que ces accès soient duaux l'un par rapport à l'autre. Partant de l'objet représenté (concret), son accès dual (i.e. son axiomatisation) nous révèle son mode de connaissance abstrait, toute cette connaissance et rien que cette connaissance. Et vice-versa.

Cette différence de nature entre dualité concrète et dualité formelle apparaît dans toute sa clarté dans le langage de la théorie des catégories. La dualité concrète s'y trouve illustrée lorsqu'un diagramme est exponentié par un objet dualisant, pour engendrer un nouveau diagramme de flèche inversée (figure 1.4).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ V^A & V^B \arrow[l, "V^f"] \end{tikzcd}$$

FIGURE 1.4 – Dualité concrète avec l'objet dualisant V

Le nouveau diagramme produit ne parle plus du même objet, ce qui contraste avec la dualité formelle qui inverse les flèches au sein du *même* diagramme. Par exemple, un épimorphisme dont on inverse les flèches devient un monomorphisme, et vice-versa.

$$X \xrightarrow{f} Y \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} Z \qquad\qquad Z \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

Épimorphisme **Monomorphisme**

FIGURE 1.5 – La dualité formelle entre épimorphisme et monomorphisme

Il reste cependant à expliquer en quoi cette dualité formelle serait une dualité de type géométrie-algèbre (ou espace-action), davantage que la dualité concrète. Comme nous l'avons déjà évoqué, l'explication se trouve déjà en germe chez Graßman [77]. Lorsqu'on définit une dualité sur une base catégorique, on manipule par définition des catégories. Or, nous savons qu'une catégorie n'est pas nécessairement distributive ; certaines le sont, d'autres non. Alors que les catégories distributives disposent des concepts duaux de produit et coproduit, les secondes n'en disposent pas : si les notions de produit et coproduit y sont bien, pourtant, définies, elles ne forment pas une dualité mais une équivalence. Il se trouve que, sous des considérations très générales, une catégorie distributive peut être dualisée par une catégorie non distributive (que Lawvere [110] appelle « linéaire ») et vice-versa, en procédant à une simple inversion des flèches (dualité formelle). Par exemple, la catégorie (distributive) des algèbres graduées de Graßmann peut être dualisée par la catégorie des espaces affines (non distributive), via le foncteur d'oubli, tandis que le foncteur de Graßmann réalise la dualisation inverse (*cf. infra*, chap 2).

On comprend alors pourquoi la dualité formelle est porteuse d'une information sur la dualité géométrie-algèbre. En effet, l'apport de la distributivité a pour effet d'« ouvrir » l'espace. Lawvere avance à ce propos la notion de « quantité d'espaces ». Comme l'avait vu Graßmann, il s'agit d'une quantité extensive : la distributivité étend la quantité d'espace. *A contrario*, l'apport de la linéarité intensifie l'espace, nous avons affaire à une quantité intensive que Lawvere appelle « espace de quantité ».

Les quantités intensives se « multiplient » aux quantités extensives, si l'on peut dire, dont elles partagent le même espace donné, pour produire une nouvelle quantité extensive de même espace.

Il est alors possible de donner une caractérisation plus fine de la dualité formelle visée dans la thèse. Puisqu'il s'agit de dualiser une « grosse » catégorie (la catégorie distributive) avec une catégorie plus petite (la catégorie linéaire), la première peut être vue comme ayant été obtenue à partir de la seconde par un « spectre » qu'il faudra clairement définir. Réciproquement, la petite catégorie est obtenue à partir de la grosse catégorie par un « plongement » (ou un « sondage ») qu'il faudra définir dualement. Nous verrons que la boîte à outils de la théorie des catégories fournit un objet adapté à cette dualité formelle : la dualité d'Isbell, qui met en dualité un préfaisceau et un copréfaisceau :

$$CoPSh \underset{Spec}{\overset{coSpec}{\leftrightarrows}} PSh.$$

FIGURE 1.6 – Dualité d'Isbell

1.8 La thèse

1.8.1 Motivations

Une nouvelle lumière sur la dualité géométrie-algèbre

Cette thèse vient d'abord combler une lacune : la relative indigence de la littérature philosophique consacrée à la dualité dans les mathématiques — et particulièrement à la dualité géométrie-algèbre (ou espace-quantité, ou *morphé-logos*) — par rapport à son importance dans les travaux des mathématiciens. Si l'étude des dualités a depuis longtemps montré son extrême fécondité en mathématique, au point d'imposer une ontologie dualiste, il faut s'étonner que cette étude ne figure pas en si bonne place en philosophie des mathématiques. Ainsi peut-on lire, dans le *Princeton Companion of Mathematics*, qu'« en dépit de l'importance de la dualité en mathématique, il n'existe pas de définition unique couvrant toutes les instances du phénomène ». C'est à ce constat que répond en premier lieu ce travail, non pour proposer une définition *unique* (couvrant *toutes* les instances du phénomène), mais pour proposer une définition *commune*, comme fondement de théorisation multidisciplinaire.

Nous ne pouvons pas ne pas rendre justice à l'épistémologie française envers laquelle nous avouons notre dette. Celle-ci offre un corpus de réflexions particulièrement consistant sur la nature des objets mathématiques. Il faut néanmoins avouer qu'il n'existe pas d'état des lieux avancé sur la question de la dualité, pas plus chez les pionniers Lautman et Cavaillès que chez les héritiers Vuillemin, Granger ou Desanti. Les réflexions fondatrices de Cavaillès et Lautman sont trop anciennes pour prendre en compte une thématique qui ne s'est véritablement révélée au grand jour qu'après la guerre. La *Philosophie de l'algèbre* de Vuillemin [187], qui est déjà une somme, devait comporter une suite ; mais elle ne verra jamais le jour car l'ambition d'embrasser toute l'algèbre et de la brasser avec la philosophie moderne était sans doute trop grande pour être prolongée par un seul homme. L'oeuvre de Granger (en particulier [75] et [76]) offre d'indéniables avancées sur la question de l'épistémologie comparative, tant dans l'ordre vertical (évaluant différents états de la connaissance) qu'horizontal (évaluant différents champs disciplinaires), et diagonal (le croisement des deux ordres précédents), mais son épistémologie n'étoffe pas véritablement les réflexions de Cavaillès [27] [26] sur la dualité. Quant à la *Philosophie silencieuse* de Desanti [41], elle effleure à peine le sujet. Nous aurions pu ajouter *La Géométrie et le problème de l'espace* de Gonseth [72] à cette revue, puisqu'il s'est efforcé d'aborder le problème de l'espace sous le triple angle mathématique, philosophique et méthodologique ; mais sa façon d'articuler les aspects intuitifs (la perception de l'espace par notre esprit), expérimentaux (la connaissance de l'espace par l'expérience) et théoriques (l'intelligence de l'espace par la déduction et l'abstraction généralisante) manque le rôle dual de l'algèbre par rapport à la géométrie. Cette thèse entend donc, en premier lieu, éclairer (modestement) certains aspects de la dualité géométrie-algèbre.

Les trois puissances de la dualité géométrie-algèbre

La seconde et principale motivation de la thèse tient aux puissances de la dualité géométrie-algèbre. Notre idée est que cette dernière possède une triple portée épistémologique, heuristique et ontologique. La thèse pourrait se laisser résumer autour des questions suivantes :

1. Peut-on définir une approche unifiée des dualités géométrie-algèbre ?
2. En quoi, si celle-ci existe, cette approche est-elle féconde pour la science ?
3. En quoi, si celle-ci existe, la science ainsi fécondée serait-elle profonde ?

Ces trois questions amènent respectivement à une thèse épistémologique, une thèse heuristique et une thèse ontologique.

1.8.2 La thèse épistémologique

Comme nous l'avons vu, la dualité *morphé-logos* était déjà vue par les anciens. L'abstraction axiomatisante formelle a eu pour effet de clarifier, préciser et généraliser cette dualité. La découverte fondamentale qui transcende les corpus mathématiques est que, dans de nombreux cas, l'espace géométrique (éventuellement topologique) que l'on se donne peut être encodé par un objet algébrique qui peut s'interpréter comme une algèbre définie sur cet espace. Cet objet algébrique permet de retrouver l'objet spatial initial (ses points, sa topologie), ce qui mène au principe d'*objet janusien*. La dualité peut alors être définie de manière plus précise comme une adjonction, c'est-à-dire une paire de foncteurs adjoints décrivant précisément l'encodage / décodage des objets janusiens. De plus, les objets de cette adjonction peuvent eux-mêmes être précisés : ils possèdent une structure faisceautique, c'est-à-dire qu'ils agissent comme des ensembles exhaustifs d'actions ou de « points de vue » vers / depuis tout objet « accessible ».

La thèse épistémologique s'exprime donc en trois points.

1. En premier lieu, il existe des opérateurs (des foncteurs) permettant de « traduire » les notions d'espace et d'action. Autrement dit, notre étude porte sur les objets intrinsèquement géométrico-algébriques.

$$\begin{tikzcd} \text{Algèbre} \arrow[r, bend left, "F"] & \text{Géométrie} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

FIGURE 1.7 – Dualité géométrie-algèbre

2. En second lieu, ces opérateurs sont adjoints. Autrement dit, pour tout objet algébrique et pour tout objet géométrique, il existe un isomorphisme naturel entre les classes de tous les morphismes associés à ces opérateurs. C'est en vertu de cette adjonction que l'on s'autorise à parler d'*objets janusiens*.

$$\begin{tikzcd} \text{Algèbre} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \text{Géométrie} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

FIGURE 1.8 – Dualité janusienne

3. En troisième lieu, les objets (janusiens) de cette adjonction sont des préfaisceaux et des copréfaisceaux, c'est-à-dire des foncteurs respectivement contravariant et covariant de la catégorie considérée vers la catégorie des ensembles [28]. Cette particularité fait de la dualité janusienne une *dualité d'Isbell*.

$$\begin{tikzcd} \text{Copréfaisceaux} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \text{Préfaisceaux} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

FIGURE 1.9 – Dualité d'Isbell

Notre thèse est que les dualités formelles régionales de type géométrie-algèbre se généralisent en une dualité plus abstraite : la dualité d'Isbell. C'est, pensons-nous, ce que suggère l'étude des dualités géométrie-algèbre tant en analyse fonctionnelle qu'en géométrie algébrique ou en topologie algébrique. Au fur et à mesure que sont découvertes ou redécouvertes les dualités géométrie-algèbre dans les différentes branches des mathématiques, la dualité d'Isbell semble s'imposer de plus en plus comme modèle commun (une fois dégagée de la nature régionale des objets et des morphismes mathématiques en situation). Implicitement, la dualité d'Isbell accrédite donc l'idée que la théorie des catégories offre un cadre unifié pour l'étude des dualités géométrie-algèbre. À vrai dire, cette thèse épistémologique n'est pas très originale. Elle n'a rien d'inédit en tout cas, puisqu'elle est plus ou moins ouvertement soutenue par certains des observateurs parmi les plus avisés sur ces questions. Nous pensons

28. Plus exactement, nous verrons que l'adjonction met en dualité la catégorie des préfaisceaux avec la catégorie opposée des copréfaisceaux.

naturellement à Bill Lawvere, le principal (et premier) promoteur de la dualité d'Isbell, mais aussi aux auteurs du wiki *n*lab, nommément Noam Zeilberger, David Corfield ou encore Urs Schreiber, que nous remercions au passage de nous avoir ouvert l'esprit.

1.8.3 La thèse heuristique

Cette thèse peut s'énoncer en termes simples : si la dualité d'Isbell est un modèle qui peut irriguer de larges pans des mathématiques, il n'y a aucune raison que sa fécondité s'arrête aux frontières des mathématiques, puisque les mathématiques sont un terreau naturel pour les sciences. Si nous comprenons que la dualité d'Isbell est créatrice d'objets mathématiques « bien pensés », c'est-à-dire *construits* (dans un sens que nous détaillerons ci-après dans la thèse ontologique), nous percevons l'intérêt de son usage pour reconsidérer les objets de science du monde sensible. Son intérêt heuristique réside en ce qu'elle crée une « situation » : une dialectique espace-action. Puisque cette dialectique permet de structurer l'identité d'objets abstraits (en situation idéelle pourrait-on dire), elle le peut assurément pour des objets porteurs de sens « réel ».

Ici se découvre enfin la troisième forme d'abstraction envisagée en creux dans ce travail : l'abstraction au sens de mathématisation, dont le dual prend le sens d' « application ». De la même manière qu'un réseau de neurones artificiel est une *application* de la théorie des graphes, ou que la relativité générale d'Einstein est une *application* de différentes géométries (différentielle, riemannienne, lorentzienne), nous pourrons dire qu'une théorie scientifique est une application de la dualité d'Isbell, en tant qu'application d'une dialectique espace-action, dans une situation réelle du monde sensible.

D'où la question : existe-t-il de telles théories ? À notre connaissance, il n'existe aucune théorie faisant explicitement usage de la dualité d'Isbell hors des mathématiques. Son usage par l'implicite n'existe pas non plus. En revanche, on peut trouver des théories flirtant avec la dualité d'Isbell, suffisamment pour être justiciable d'une reconsidération sous cet angle. C'est le sens de la seconde partie de cette thèse, qui présente trois domaines d'application de la dualité d'Isbell, dans des domaines très différents.

Mais la dualité d'Isbell n'intéresse naturellement pas que les sciences appliquées. Les sciences « abstraites » peuvent aussi s'en inspirer pour revisiter certaines théories. Dans cet esprit, nous nous proposons de revisiter, dans la première partie, un pan de la logique mathématique contemporaine : la géométrie de l'interaction de Girard.

Il va sans dire que ce volume n'offre qu'un infime échantillon du réel potentiel de la dualité d'Isbell, dont l'origine « génétique » (catégorique) le prédestine naturellement à une vocation universaliste. Il faut donc considérer ce volume comme un premier travail exploratoire, à l'occasion duquel nous espérons convaincre le lecteur que ces territoires, qui jusque là étaient difficilement accessibles, méritent d'être explorés et exploités. Ils le méritent car ils portent selon nous la marque d'une exigence clairement affirmée : l'exigence de constructivité. Ceci nous mène à la thèse ontologique défendue dans ce travail.

1.8.4 La thèse ontologique

Pour saisir les vertus ontologisantes de la dualité d'Isbell, il faut revenir à notre enchaînement paradigmatique $\mathfrak{P}_1 \to \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_3$, dont les flèches indiquent, rappelons-le, l'apport d'une constructivité. La première d'entre elle témoigne de l'avènement du raisonnement fonctionnel. Le « moment de la fonction » a été cet instant où des inférences appartenant à une même famille ont fini par être factorisées par un objet abstrait plus général, façon d'automatiser les réponses aux questions que l'on se donne. Ce premier niveau de constructivité se laisse finalement imager par une machine entrées-sorties, sorte de fabrique à réponses : interrogez la machine, soumettez lui une entrée, elle vous répondra en retournant une sortie, la réponse à votre question. Cette constructivité-là renvoie à la fabrication de la sortie par la machine (quelle que soit l'entrée autorisée soumise). Pour reprendre des catégories bien à la mode en philosophie, nous dirons que cette constructivité est d'ordre *sémantique*, en tant qu'elle interroge le *sens* de la machine. La question clé est « que fait la machine ? ».

Le passage $\mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_3$ témoigne pour sa part d'un renversement de l'ordre définitionnel des objets : ce ne sont plus les regroupements de points (i.e. les espaces) qui définissent les fonctions, mais les recollements de fonctions qui définissent les espaces et leurs points. Naturellement, ce renversement n'aurait été possible sans l'existence préalable de la notion de fonction. C'est en cela que l'abstraction matérielle (signalée par le passage $\mathfrak{P}_1 \to \mathfrak{P}_2$) prépare le terrain de l'abstraction formelle. Cette montée vers l'abstraction formelle scelle finalement la transcendance de la dualité espace-action, contre le primat de l'espace (ou celui de l'action). L'opération de recollement qui préside à ce renversement ne va pas sans une remise à plat de l'idée d'espace et d'action, un « retour à l'anomie » comme l'a écrit Girard [70] dans un autre contexte [29].

Mais que signifie concrètement la remise à plat de la « machine » ? En peu de mots, ceci : « Imaginez une machine abstraite, soumettez lui des entrées, laissez la calculer, laissez la retourner des sorties, ou s'arrêter sans retourner de sorties, ou calculer indéfiniment sans retourner de sorties, et lorsque la machine retourne des sorties, analysez-les, donnez-leur un sens et donnez un nom à la machine ». Ce n'est donc plus la machine qui donne le sens des réponses, c'est l'analyse des entrées-sorties qui donne le sens de la machine [30]. D'où un recentrage sur les protocoles de construction des machines, plutôt que sur le sens attribué *ex ante* aux machines. Ce deuxième niveau de constructivité renvoie maintenant à la fabrication de la machine. Nous dirons donc que cette constructivité est d'ordre *ontologique*, en tant qu'elle interroge l'*identité* — l'être — de la machine. La question clé est maintenant « quelles conditions nous permettent d'identifier cette machine ? ».

Ce recentrage sur les conditions d'identification de la machine consacre la nature transcendantale du paradigme $\mathfrak{P}_3$. On saisit du même coup la portée existentialiste de la reconstruction. Alors les « machines concrètes » calculent au fond ce que l'on sait déjà, ou au mieux ce que l'on a envie de chercher, les machines abstraites, elles, *construisent* du sens. On ne préjuge pas leur essence, on établit leur existence. Ce constructivisme-là est donc ouvertement existentialiste, ou dé-essentialiste. « Pas d'entité sans identité » disait Quine [148]. Nous serions tentés de compléter l'aphorisme

29. En logique, à propos du lambda-calcul pur, dans son manifeste pour une syntaxe transcendantale

30. On remarquera qu'on peut aussi donner du sens à une machine qui ne retourne aucune sortie : les programmes non concluants ont aussi leur sémantique.

par son dual : pas d'identité sans entités, c'est-à-dire pas de sens sans conditions structurantes.

Reste alors à déterminer quelles sont ces entités porteuses d'identité, des conditions porteuses de sens. Dans le domaine des mathématiques, ces conditions sont déterminées par les propriétés des catégories précisément en présence dans la dualité d'Isbell. D'abord, il faut savoir si la « situation espace-action » est effectivement redevable d'une lecture catégorique, c'est-à-dire si nous pouvons identifier une petite catégorie (*cf.* chap 2 définition 37). Les conditions structurantes s'incarnent alors dans la donation des objets et des morphismes de cette catégorie. Il faut souligner ici l'étendue des possibles. Non seulement les catégories sont en nombre infini, mais on peut élargir le spectre d'applications aux n-catégories (cf. chap 2 définition49) ainsi qu'aux catégories enrichies (cf. chap 2 définition). La dualité d'Isbell peut donc subsumer une variété insoupçonnée de « situations espace-action ». Il n'est d'ailleurs pas certain que la dualité d'Isbell soit l'ultime objet pour interpréter le plus large assortiment de situations espace-action, autrement qu'en ajoutant une amusette supplémentaire dans la panoplie puérile [31] déjà bien remplie par l'autoréférence gödelienne, les pseudo-variétés fractales ou les plombants effets papillon. Il faut être conscient que les outils promus dans cette thèse sont encore jeunes, et que, même s'ils sont déjà soigneusement ciselés, ils seront l'objet de nouvelles ramifications. Il ne fait aucun doute que le procès de l'abstraction généralisante poursuivra sa route. C'est avec ce regard sur le futur que nous souhaitons clore cette introduction. Il y aura d'autres thèses à écrire sur ce beau sujet. Nous espérons que le présent volume posera d'inspirants jalons.

1.8.5 Plan de la thèse

Notre objectif n'est pas d'exposer directement et successivement les puissances de la dualité géométrie-algèbre. Nous partons du principe que la meilleure façon de montrer (et démontrer) ces puissances est de les mettre en situation, de les « mettre en action ». La thèse se propose donc de dérouler le programme par domaine d'application. Chacun des chapitres de ce volume porte son attention sur un champ disciplinaire. Ce faisant, nous invitons le lecteur à déduire les arguments épistémologiques, heuristiques et ontologiques du matériel théorique exposé dans chacun des chapitres.

La thèse est organisée en deux parties. La première traite de la dualité algèbre-géométrie dans les sciences abstraites et comporte deux chapitres. La seconde partie traite de la dualité algèbre-géométrie dans les sciences appliquées et comporte trois chapitres. Voici les résumés des cinq chapitres.

Chapitre 2 - Mathématiques

Ce chapitre aborde la dualité d'Isbell dans les mathématiques. L'idée centrale est d'explorer la nature duale (au sens catégorique d'adjonction) des objets géométrico-algébriques. D'une façon générale, cette adjonction n'a pas de sens mathématique concret précis, tant que les objets algébriques et géométriques ne sont pas clairement définis (comme catégories). Elle prend tout son sens dans l'étude de cas particuliers. Notre idée est donc d'identifier une notion d'adjonction bien précise capable d'embrasser un large éventail de domaines mathématiques. Après une investigation

31. Pour reprendre le bon mot de Châtelet [29].

attentive, nous avons trouvé quatre grands corpus mathématiques relevant d'une dualité similaire entre algèbres et espaces : la dualité entre la catégorie des schémas et la catégorie des anneaux, la dualité entre la catégorie des champs dérivés et la catégorie des anneaux dérivés, la dualité entre la catégorie des espaces topologiques et la catégorie des C*-algèbres, la dualité entre la catégorie des espaces sobres et la catégorie des treillis distributifs. Après avoir exposé ces quatre dualités régionales, nous présentons la théorie qui les généralise (grâce à la théorie des catégories) : la dualité d'Isbell. Cette dernière section expose ce faisant les principaux ressorts mathématiques de la thèse.

Chapitre 3 - Logique

Ce chapitre aborde la dualité d'Isbell en logique. Elle prend appui sur la géométrie de l'interaction de Girard, et plus précisément sur une version catégorique de cette dernière. La géométrie de l'interaction de Girard est un ambitieux programme de reconstruction de la logique visant à réinterpréter la dualité classique syntaxe-sémantique. La constructivité ontologisante se traduit ici par le renversement du sens de la construction des règles logiques : plutôt que de construire les règles logiques qui mènent au jugement logique, on (re)construit les lois qui mènent aux règles logiques. Cette reconstruction est rendue possible par l'examen attentif des propriétés géométriques cachées des règles logiques [32]. Cette approche s'intéresse donc aux conditions de possibilité de la sémantique, de façon à *construire* les formules logiques (ce qui mène à ce que Girard [70] a appelé plus tard « syntaxe transcendantale »). Cependant, la géométrie de l'interaction de Girard ne parvient pas à dégager de situation espace-action claire (au sens catégorique considéré). Nous nous appuyons sur la relecture catégorique proposée par Haghverdi [83] pour révéler une situation espace-action très particulière à la géométrie de l'interaction.

Chapitre 4 - Sciences physiques

Ce chapitre aborde la dualité d'Isbell en sciences physiques, et plus précisément en théorie quantique des champs (TQC). L'une des grandes questions qu'a posée la mécanique quantique dès son origine est la réinterprétation de la notion d'*état* (qui décrit un système physique dans le but de le prévoir). Qu'est-ce qu'un état quantique et comment change-t-il dans le temps ? Comment peut-on calculer son changement d'état ? Ces questions ont donné lieu à la représentation dite d'Heisenberg, dans laquelle les opérateurs agissant sur les observables varient au cours du temps mais où les états sont indépendants du temps, et la représentation dite de Schrödinger, dans laquelle les opérateurs sont indépendants du temps mais où les états varient au cours du temps. Il existe aujourd'hui essentiellement deux approches différentes de l'axiomatisation de la TQC : l'une reformulant la représentation de Heisenberg, la TQC algébrique introduite par Haag et Kastler [81], l'autre reformulant la représentation de Schrödinger, la TQC fonctorielle formulée par Atiyah [12] et Segal [164]. Autour des années 2010, plusieurs travaux (notamment Jacob et Lurie [90], Schreiber [159]) ont montré comment reconstruire la TQC algébrique à partir de la TQC fonctorielle, ouvrant la voie à une approche générale de la TQC en termes de dualité d'Isbell.

32. « My thesis is that the meaning of logical rules is to be found in the well-hidden geometrical structure of the rules themselves » [69].

Chapitre 5 - Sciences économique et sociale

Ce chapitre aborde la dualité d'Isbell en sciences économiques et sociales, et plus particulièrement dans la théorie de la valeur. Nous commençons par identifier le tableau entrées-sorties (Quesnay, 1758) et la théorie de l'équilibre général (Walras, 1874) respectivement comme des théories d'équilibre économique de première et seconde générations, en montrant en quoi ces théories appartiennent respectivement aux paradigmes $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$. Nous introduisons alors une nouvelle théorie de l'équilibre économique de troisième génération, appartenant au paradigme $\mathfrak{P}_3$. Ce nouveau paradigme généralise la théorie de l'équilibre général de la même façon que cette dernière généralise le tableau entrées-sorties. Économiquement, la généralisation que nous proposons exploite deux filières : la théorie monétaire du marché de Cantillon-Smith et la théorie socio-économique de la médiation sociale. L'idée-clé de la théorie est que si on ajoute une structure d'interdépendances (monétaire et/ou sociale) entre les agents économiques, le problème de l'équilibre général change viscéralement de nature, car la relation prix-quantité prend une tournure circulaire. Il devient impossible d'avoir accès à l'espace de la valeur sans connaître l'opération de recollement qui préside à sa construction. La conclusion est que le recollement est l'expression même du lien social qui lie les agents économiques (consommateurs, producteurs, banques).

Chapitre 6 - Sciences de l'apprentissage

Ce chapitre aborde la dualité d'Isbell en sciences de l'apprentissage, et plus particulièrement dans la théorie de l'enquête de Dewey. Lorsque Dewey [44] dénonçait la fétichisation (*hypostatization*) de la théorie de la connaissance, il s'attaquait à la méthode démonstrative, ontologiquement essentialiste. Farouchement opposé à la division forcée de l'art du raisonnement — un canon pour l'analytique, un organon pour la méthode, Dewey [46] a échafaudé sa propre théorie de l'enquête (*theory of inquiry*). Comparée à la logique de son temps, sa théorie de l'enquête vise un programme d'une autre ampleur, où les méthodes inductives sont appelées à jouer un rôle essentiel. Mais sa théorie s'oppose aussi à la théorie de la connaissance habituelle, d'inspiration kantienne. Alors que la théorie kantienne est toujours une théorie de la connaissance, ce sont les méthodes de recherche qui, pour Dewey, doivent précéder la connaissance. En ce sens, sa théorie s'accepte comme une philosophie (et une pédagogie) du problème. Cette philosophie déborde la logique déductive dans sa façon radicale d'envisager les « relations » logiques, car les processus expérimentaux inductifs se retrouvent au centre de la construction du problème. Sur cette base, nous proposons de reformuler et de moderniser la théorie de l'enquête en termes d'espace-action. L'enquête y est réinterprétée comme un ensemble de contextes de typage et l'accumulation des expériences — la progression de l'enquête — comme un système de raffinement de contextes de typage. Ce faisant, nous caractérisons le processus de l'enquête en termes de faisceaux et cofaisceaux, pour finalement dégager une dualité d'Isbell.

Conclusion

La conclusion referme la thèse sur quelques remarques. On revient sur les puissances de la dualité d'Isbell et des situations espace-action correspondantes. Sur le plan épistémologique, on ouvre un débat sur la notion bachelardienne d'obstacle épistémologique. Sur le plan heuristique, nous insistons sur la nécessité de ne pas perdre de vue le contenu théorique des situations espace-action, car ces dernières ne sont que le cadre de développement du discours scientifique, ni plus ni moins. Enfin sur le plan ontologique, nous consacrons quelques développements sur les aspects kantiens et hégéliens de la thèse.

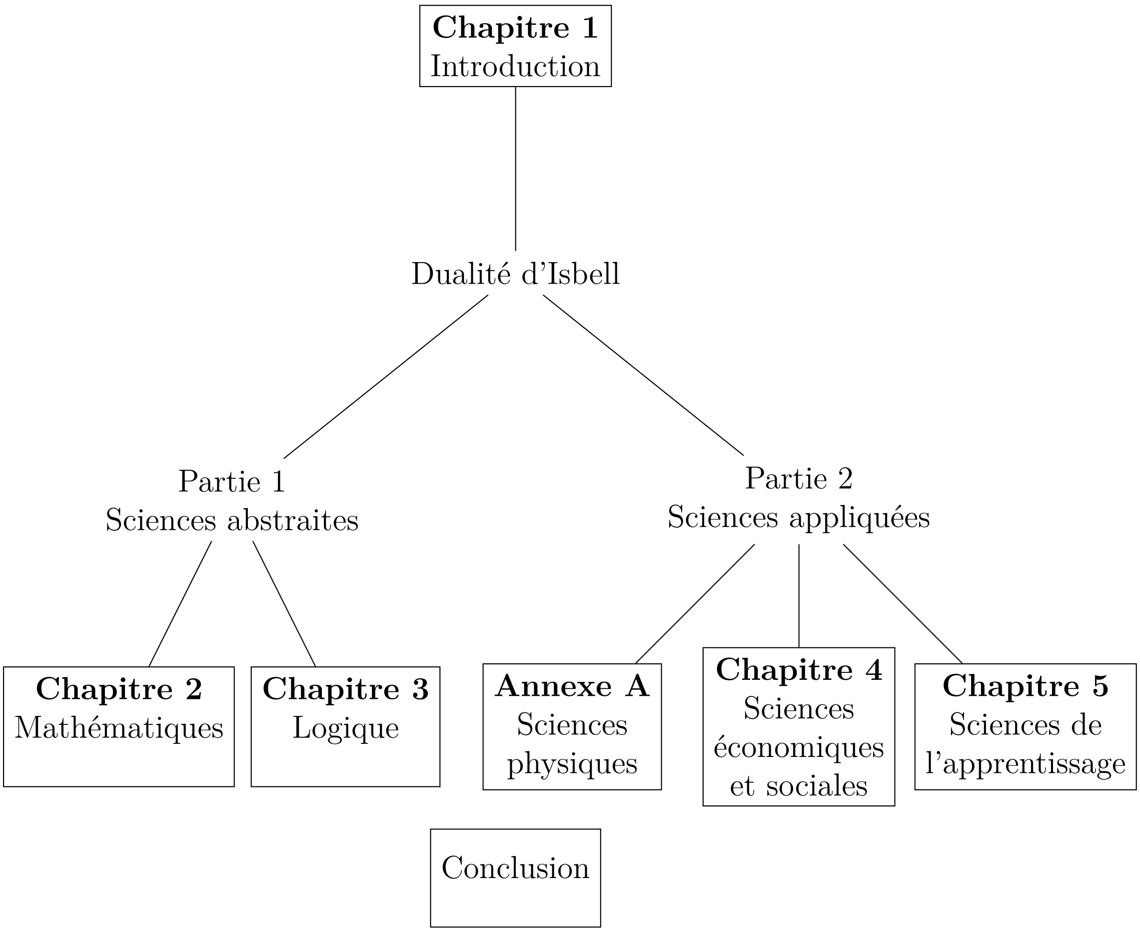


FIGURE 1.10 – Plan de la thèse

Première partie

Sciences abstraites

Chapitre 2

Mathématiques

Contents

Riassunto

Questo capitolo descrive la dualità di Isbell in matematica. L'idea centrale è quella di esplorare la natura duale (nel senso categorico di aggiunzione) di oggetti geometrico-algebrici. In generale, quest'aggiunzione non ha alcun senso matematico concreto, finché gli oggetti algebrici e geometrici non sono chiaramente definiti (come categorie). Essa ha senso nello studio dei singoli casi. La nostra idea è di identificare una nozione di aggiunzione in grado di abbracciare una vasta gamma di settori matematici. Dopo un'attenta indagine, abbiamo trovato quattro principali corpus matematici sotto una dualità tra algebra e spazi : la dualità tra la categoria degli schemi e la categoria degli anelli, la dualità tra la categoria dei campi derivati e la categoria degli anelli derivati, la dualità tra la categoria degli spazi topologici e la categoria delle C*-algebre, la dualità tra la categoria degli spazi sobri e la categoria dei reticoli distributivi. Dopo aver delineato queste quattro dualità regionali, presentiamo la teoria che generalizza (grazie alla teoria delle categorie) : la dualità di Isbell. Questa sezione finale espone così facendo i principali strumenti matematici della tesi.

Résumé

Ce chapitre aborde la dualité d'Isbell dans les mathématiques. L'idée centrale est d'explorer la nature duale (au sens catégorique d'adjonction) des objets géométrico-algébriques. D'une façon générale, cette adjonction n'a pas de sens mathématique concret précis, tant que les objets algébriques et géométriques ne sont pas clairement définis (comme catégories). Elle prend tout son sens dans l'étude des cas particuliers. Notre idée est donc d'identifier une notion d'adjonction bien précise capable d'embrasser un large éventail de domaines mathématiques. Après une investigation attentive, nous avons trouvé quatre grands corpus mathématiques relevant d'une dualité similaire entre algèbres et espaces : la dualité entre la catégorie des schémas et la catégorie des anneaux, la dualité entre la catégorie des champs dérivés et la catégorie des anneaux dérivés, la dualité entre la catégorie des espaces topologiques et la catégorie des C*-algèbres, la dualité entre la catégorie des espaces sobres et la catégorie des treillis distributifs. Après avoir exposé ces quatre dualités régionales, nous présentons la théorie qui les généralise (grâce à la théorie des catégories) : la dualité d'Isbell. Cette dernière section expose ce faisant les principaux ressorts mathématiques de la thèse.

Abstract

This chapter deals with Isbell duality in mathematics. The central idea is to explore the dual nature (in the categorical sense of adjunction) of geometrical-algebraic objects. In general, this addition does not have a concrete mathematical meaning, as long as algebraic and geometrical objects are not clearly defined (as categories). It takes its meaning in the study of individual cases. Our idea is therefore to identify a precise notion of adjunction, capable of embracing a wide range of mathematical domains. After careful investigation, we found four large mathematical corpus dealing with duality between algebras and spaces : the duality between the category of schemes and the category of rings, the duality between the category of derived fields and the category of derived rings, the duality between the category of topological spaces and the category of C*-algebras, the duality between the category of sober spaces and the category of distributive lattices. After presenting these four

regional dualities, we present the theory which generalizes them (within category theory) : Isbell duality. This last section exposes the main mathematical tools of the thesis.

2.1 Introduction

Ce chapitre expose les principaux ressorts techniques de la thèse. Formellement et mathématiquement, l'idée centrale de la thèse est d'explorer la nature duale (au sens catégorique d'adjonction) des objets géométrico-algébriques. À tout objet algébrique, c'est-à-dire en un sens à tout objet "calculatoire" [1], il est possible d'associer un objet géométrique, c'est-à-dire un « espace concret ». Chaque fois que nous avons un opérateur (un foncteur) permettant de passer d'une algèbre à son espace associé, nous avons un opérateur adjoint permettant de retrouver cette algèbre à partir de cet espace.

D'une façon générale, cette adjonction n'a pas de sens mathématique concret précis, tant que les objets algébriques et géométriques ne sont pas clairement définis (comme catégories). Elle prend tout son sens dans l'étude des cas particuliers. Notre idée était donc d'identifier une notion d'adjonction bien précise capable d'embrasser un large éventail de domaines mathématiques. Après une investigation attentive, nous avons trouvé quatre grands corpus mathématiques relevant d'une dualité similaire entre algèbre et espaces :

- La dualité entre la catégorie des schémas et la catégorie des anneaux,
- La dualité entre la catégorie des champs dérivés et la catégorie des anneaux dérivés,
- La dualité entre la catégorie des espaces topologiques et la catégorie des C*-algèbres,
- La dualité entre la catégorie des espaces sobres et la catégorie des treillis distributifs.

Il doit être clair que ces exemples sont le reflet d'un état de l'art très provisoire voire embryonnaire. Si les exemples listés ci-dessus sont pour certains assez anciens, leurs liens n'ont été établis que plus récemment. Si l'on se souvient que le développement des mathématiques suit un processus de type exploration-exploitation, dans lequel les phases d'exploitation fédèrent, par abstraction, les résultats divers et variés obtenus lors des phases d'exploration, nous pourrions dire métaphoriquement que le plan de ce chapitre consiste à couper un arbre à la hauteur de ses quatre branches principales. D'autres choix auraient été possible :

- Vers le haut d'abord, car celles-ci sont déjà des généralisations. Par exemple, la dualité entre la catégorie des espaces topologiques et la catégorie des C*-algèbres, communément appelée dualité de Gelfand, est en réalité une dualité générique englobant plusieurs sous-dualités : entre les C*-algèbres unifères et les espaces compacts, entre les C*-algèbres non-triviales et les espaces connexes, entre les C*-algèbres séparables et les espaces à base dénombrable d'ouverts, entre les C*-algèbres d'idéaux bilatères fermés et les espaces ouverts, entre les C*-algèbres d'idéaux essentiels et les espaces ouverts denses, entre les C*-algèbres de quotients et les espaces fermés, etc. La dualité entre la catégorie des

1. Dans ce cas on entend calculatoire au sens large, puisque le « calcul algébrique » s'oppose généralement à l'algèbre générale comme étude des structures algébriques, à laquelle renvoie la notion d'algèbre utilisée ici

espaces sobres et la catégorie des treillis infiniment distributifs offre un deuxième exemple de dualité enveloppante, puisque cette dualité se décline suivant la caractérisation des espaces sobres. La restriction aux espaces de Hausdorff (espaces topologiques ordonnés ou espaces de Priestley) définit une dualité pour les treillis distributifs bornés, tandis que la restriction aux espaces sobres cohérents définit une dualité pour les treillis distributifs, ces deux restrictions généralisant celle des espaces sobres cohérents de Hausdorff, qui définit la dualité de Stone bien connue (entre les espaces totalement non connexes et les algèbres de Boole). Comme pour la dualité précédente concernant l'analyse fonctionnelle, il est vain de détailler toutes les variantes de la dualité, d'autant que de nouvelles dualités sont peu à peu découvertes, étoffant un peu plus le branchage de l'arbre. C'est la raison pour laquelle il est apparu illusoire de choisir un niveau de classification plus fin.

- Vers le bas. Alternativement, une classification plus grossière aurait été possible. En effet, les deux exemples qui viennent d'être détaillés sont, d'une certaine façon, les instances d'un schéma plus général exploitant l'équivalence (resp. la dualité) des espaces topologique avec leur catégorie (resp. opposée) d'algèbre associée, le premier exemple se concentrant sur des algèbres de fonctions (dualité de Gelfand et ses variantes), le second sur des structures ordonnées, c'est-à-dire sur des algèbres de type $\{0, 1\}$ (dualité de Stone et ses généralisations). Nous verrons comment il est possible de générer les deux types de dualité à l'aide d'un objet "janusien" unique. De la même façon, la dualité entre la catégorie des schémas et la catégorie des anneaux et la dualité entre la catégorie des champs dérivés et la catégorie des anneaux dérivés sont des instances d'une dualité plus abstraite, la première s'intéressant aux anneaux discrets (géométrie algébrique), la seconde aux anneaux non-discrets (géométrie algébrique dérivée).

Et finalement, à la racine de l'arbre, les deux dualités généralisantes se rejoignent sur une notion abstraite et catégorique de dualité, qui transcende les dualités régionales : la dualité d'Isbell. Il faut donc voir ce chapitre comme l'état des lieux provisoire d'un ensemble de travaux mathématiques pouvant se ranger sous la bannière d'une dualité formelle fédératrice. On remarquera par ailleurs que la dualité d'Isbell soit s'entendre comme une dualité géométrie / algèbre au sens large, c'est-à-dire qu'elle peut impliquer des géométries et des algèbre d'ordre supérieur (géométrie homotopique / algèbre homotopique). Ce faisant, la dualité d'Isbell embrasse plusieurs sous-dualités catégoriques, ce qui en fait un outil très puissant pour interpréter des dualités mathématiques régionales variées.

Il eut été possible d'étendre encore davantage la notion de dualité (au delà de la dualité d'Isbell), mais le prix à payer fut rapidement jugé comme inacceptable. Il nous est apparu essentiel, dans une thèse qui se veut déjà transdisciplinaire, de respecter une cohérence formelle. Il ne fait aucun doute que d'autres adjonctions participent d'une dualité algèbre-géométrie, mais nous ne voyons pas de concept de dualité formel plus englobant que les adjonctions relatives à la théorie des faisceaux (i.e. rangées sous la dualité d'Isbell). Autrement dit, notre thèse ne vise pas seulement une unité conceptuelle mais, plus de façon plus stricte, une unité formelle, exprimée à l'aide de la théorie des catégories.

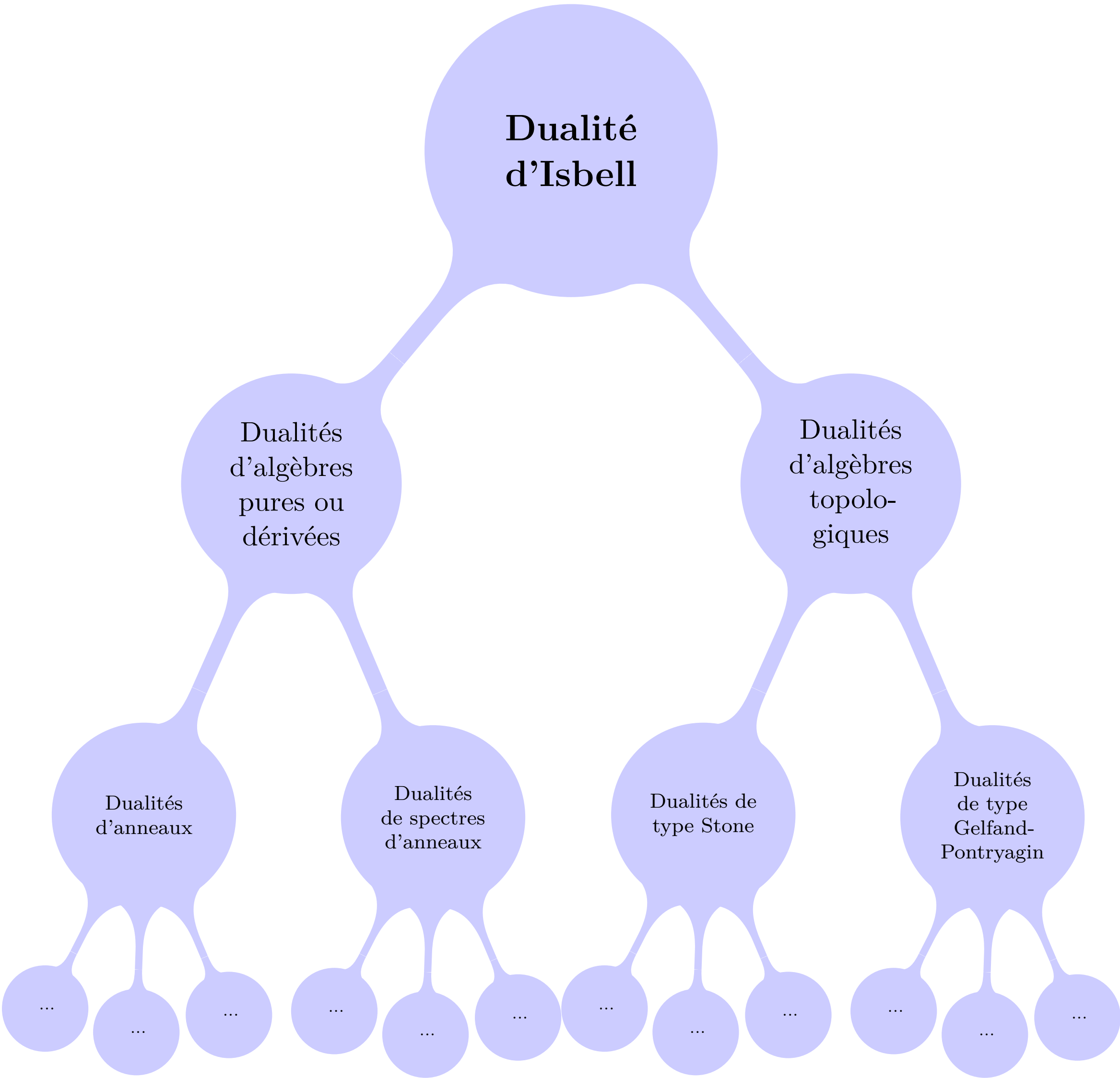


FIGURE 2.1 – La dualité d'Isbell et ses ramifications

Ce chapitre doit s'envisager comme un abrégé, ou un compendium, sur le thème de la dualité faisceautique entre géométrie et algèbre. Il n'introduit aucune innovation, même dans la présentation des concepts, mais s'efforce de présenter le plus clairement possible les dualités à l'oeuvre, dans une démarche plus pédagogique qu'exhaustive. Nous avons limité l'exposition au seul matériel nécessaire à la compréhension des thèmes abordés. Les sections 2 à 5 exposent les quatre dualités régionales listées ci-dessous, la section 6 la dualité abstraite englobante, la dualité d'Isbell. Les notions catégoriques qui sont utilisées dans les sections 2 à 5 font l'objet d'une exposition détaillée dans la section 6 consacré à la théorie des catégories. Nous renvoyons donc le lecteur à la dernière section pour les compléments d'analyse catégoriques. Pour chacune des sections 2 à 6, nos références bibliographiques sont données en début de section.

2.2 Géométrie algébrique : la dualité $\mathcal{Sch} \leftrightarrows \mathcal{Ring}^{\mathrm{op}}$

Pour composer cette section, nous nous sommes inspirés de Eisenbud et Harris [49], Mumford [134], Lawvere [110] [111]. Nous renvoyons le lecteur à ces références pour une revue plus complète.

2.2.1 L'algèbre géométrique et les prémices d'une dualité algébrico-géométrique

Avant d'analyser la dualité géométrie / algèbre en géométrie algébrique, il convient de donner quelques repères historiques. Historiquement, c'est en algèbre géométrique, avant que l'algèbre générale prenne la forme de la géométrie algébrique, qu'il faut probablement trouver les premières intuitions d'une dualité moderne entre géométrie et algèbre. Par « moderne » nous entendons formelle. Rappelons que la dualité entre géométrie et algèbre est esquissée dès l'Antiquité avec Euclide [50] (spécifiquement dans le livre VII des *Éléments*, *cf.* intoduction).

Le premier tournant majeur se produit au XVIè siècle, lorsque Viète [186] esquisse pour la première fois le *lien* entre géométrie et algèbre. La dualité n'apparait plus comme un simple dualisme, mais comme une correspondance formelle entre le monde du calcul algébrique et le monde de la géométrie des formes, comme deux faces d'un même objet (dont la face algébrique sera, on le sait, mise à profit par Descartes [42] pour tendre vers d'authentiques résolutions algébriques, via la géométrie analytique). La contribution de Descartes fut essentielle à la diffusion de l'algèbre géométrique, mais la géométrie analytique cartésienne souffrait d'un relatif handicap : elle ne pouvait pas se passer de la notion de repère (cartésien), alors que les méthodes de résolution purement géométriques se dispensent d'origine. Il fallait à l'évidence abstraire la géométrie analytique pour la mettre à niveau. « Abstraire », c'était extraire le calcul algébrique de sa base vectorielle, pour tendre vers une géométrie analytique sans coordonnées.

C'est ce que s'emploie à faire Leibniz [119], qui invente le calcul barycentrique sans repère. Nous sommes alors au début d'un long processus de traduction des objets géométriques vers des objets algébriques, à travers des structures algébrico-géométriques de plus en plus abstraites. Il ne manque plus alors qu'une généralisation permettant de fédérer dans une théorie unifiée les principaux objets géométriques : les notions de longueur, surface, angle... Le grand artisan de cette généralisation, qui parachève en quelque sorte l'algèbre géométrique, est Graßmann. Selon Lawvere [111], Graßmann [77] [78] introduit dans les mathématiques une nouveauté conceptuelle majeure. Pour la première fois, nous prenons conscience que deux sortes de quantité peuplent les mathématiques : les quantités extensives et les quantités intensives. Lorsque Graßmann invente l'algèbre extérieure en 1844, son idée est précisément d'algébriser les notions de quantités extensives (points, droites, plans), et son traité porte lui-même le nom de « Traité sur l'extension » (*Ausdehnungslehre*).

L'algèbre extérieure d'un espace vectoriel E est une algèbre graduée, munie de la somme directe $\oplus$ comme loi additive et d'une loi multiplicative appelée produit extérieur, est notée $\wedge$. Contrairement au produit vectoriel $u \times v$, le produit extérieur $u \wedge v$, appelé bivecteur (ou k-multivecteur de dimension 2), n'est pas un vecteur du même espace mais d'un nouvel espace tel que $u \times v = -I(u \wedge v)$. Il s'ensuit que le produit de deux k-multivecteurs de degré k_1 et k_2 est un k-multivecteur de degré au plus égale à $k_1 + k_2$. Sur cette base, l'algèbre extérieure apparaît comme la somme directe des puissances extérieures successives : $\Lambda(E) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k E$. Ainsi l'algèbre extérieure est une algèbre anti-commutative graduée. Elle peut être obtenue à partir des espaces affines de points en ajoutant les puissances extérieures $\Lambda^k E$ des degrés supérieurs à $k = 2$. Se dégage alors un foncteur adjoint permettant de retrouver facilement les espaces affines de points à partir de l'algèbre extérieure : il s'agit tout simplement du foncteur d'oubli, qui ne garde que les puissances extérieures de degré 1. L'algèbre extérieure de Graßmann définit ainsi en creux une dualité algébrico-géométrique entre la catégorie des algèbre graduée et la catégorie des espaces affines, mettant en évidence une adjonction entre le « foncteur de Graßmann » G et le foncteur d'oubli.

$$\begin{tikzcd} \text{algèbre graduée} \arrow[r, bend right, "\text{foncteur d'oubli}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \text{espaces affines} \arrow[l, bend right, "G"'] \end{tikzcd}$$

Nous arrivons alors avec Graßmann à un second tournant. Alors que les dualités algébrico-géométriques apparaissaient jusque là comme des inversions d'opérations (disons entre des opérations synthétiques et des opérations analytiques), elles apparaissent dorénavant comme des adjonctions, au sens de la théorie des catégories [2]. D'après Lawvere [111], l'approfondissement des idées de Graßmann suggère un cadre philosophico-mathématique général pour penser une dialectique plus vaste entre l'espace et la quantité, entre ce qu'il appelle plus précisément *quantités d'espace* et *espaces de quantités*. En effet, à l'image de la construction de Graßmann, les quantités extensives peuvent être considérées comme des "quantités d'espace", tandis que, à l'image du produit vectoriel, les quantités intensives peuvent être considérées comme des "espaces de quantité". Les notions de quantités d'espace et d'espace de quantité vivent dans des catégories duales : la première satisfait la loi de distributivité du produit sur le coproduit, la seconde ne la satisfait pas.

Catégoriquement parlant, une quantité extensive s'exprime effectivement comme une catégorie distributive. Une catégorie C équipée de produits (finis) $\times$ et de coproduits (finis) $+$ est appelée (finitairement) *distributive* si, pour tout $X, Y, Z \in C$, le morphisme canonique de distributivité $X \times Y + X \times Z \longrightarrow X \times (Y + Z)$ est un isomorphisme. L'idée est que, si un espace est la somme de deux espaces plus petits, alors on doit pouvoir donner une distribution de type donné pour chacun des espaces plus petits. L'arithmétique donne l'exemple le plus courant avec la distributivité de la multiplication sur l'addition. Parmi les innombrables autres catégories, citons la théorie des ensembles munie de l'union et de l'intersection $(a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c))$, ou munie du produit cartésien et de l'union disjointe $(a \times (b \sqcup c) = (a \times b) \sqcup (a \times c))$, la théorie des treillis munie de la borne supérieure $\vee$ et de la borne inférieure $\wedge$ $(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c))$, ou encore la logique linéaire munie des connecteurs positifs $(a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c))$ ou négatifs $(a \parr (b \,\&\, c) = (a \parr b) \,\&\, (a \parr c))$.

Pour Lawvere [110], les catégories distributives s'opposent aux catégories qu'il nomme "linéaires", pour lesquelles le produit s'identifie au coproduit. C'est le cas des espaces vectoriels muni de la somme directe. Rappelons que la somme $E + F$ de deux sous-espaces vectoriels E et F est définie par $E + F = \{x + y \mid (x, y) \in E \times F\}$, tandis

2. D'une certaine manière, on peut donc dire que la théorie des catégories est l'héritière de la longue tradition de l'algèbre géométrique, dont elle constitue une forme d'aboutissement, comme calcul géométrique universel

que la formule de Graßmann détermine sa dimension en fonction des dimensions de E et F : $\dim(E+F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F$. Dans ce cadre, on dit que E et F sont en somme directe, notation $E \oplus F$, si $E \cap F = \varnothing$. Dans ce cas $\dim(E+F) = \dim E + \dim F$ et E et F sont des sous-espaces supplémentaires de l'espace somme $E+F$. La somme directe n'est alors pas fondamentalement différent du produit. Par extension, Lawvere parle de *catégories linéaires* lorsque le produit et le coproduit sont isomorphes, à l'instar de d'algèbre linéaire. Les groupes abéliens, les espaces vectoriels topologiques et fournissent d'autres exemples de catégories linéaires.

Les notions de quantités d'espace et d'espaces de quantité apparaissent alors comme les foncteurs adjoints d'un seul et même cadre d'analyse algébrico-géométrique, comme passage des catégories distributives au catégories linéaires.

$$\begin{tikzcd} \text{catégorie distributive} \arrow[r, shift right, "\text{quantités d'espace}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \text{catégorie linéaire} \arrow[l, shift right, "\text{espaces de quantité}"'] \end{tikzcd}$$

2.2.2 La géométrie algébrique et la notion de schéma

Avec Graßmann (puis Clifford), la géométrie analytique arrive à une sorte d'aboutissement, où la plupart des objets géométriques sont traduits comme objets (i.e. structures) algébriques : les longueurs, les surfaces, les angles, les rotations, etc. Mais, tel un dictionnaire entre deux langues, les traductions sont attendues dans les deux sens [3]. Une fois que les objets géométriques sont traduits en structures algébriques, ces dernières peuvent faire l'objets de généralisations, ou suggérer d'autres structures algébriques, lesquelles demandent à être traduites à leur tour en termes géométriques. Or, le monde algébrique induit de nouvelles géométries, des géométries non-triviales dont on ne pouvait soupçonner l'existence sans l'aide du dictionnaire inversé. C'est cette prise en considération du dictionnaire bilatéral géométrie-algèbre, qui généralise le dictionnaire unilatéral géométrie-algèbre, qui est la raison d'être de la géométrie algébrique. Dorénavant, les objets sont plus abstraits et peuvent induire des espaces hautement non-triviaux ou, mieux, apporter des intuitions géométriques dans des situations qui pouvaient *a priori* sembler exclusivement algébriques. L'un des objets de ce nouveau dictionnaire est particulièrement important : la notion de schéma. Il s'agit de l'objet de base de la géométrie algébrique car elle permet de généraliser la notion de forme géométrique en rapport avec un dual algébrique primordial : la catégorie des anneaux.

En fait, on peut faire remonter la géométrie algébrique à l'étude les solutions des systèmes d'équations polynomiales. Par exemple, les systèmes d'équations linéaires traduisent des objets géométriques comme le point, la ligne, le plan, l'hyperplan... Plus généralement, les systèmes d'équations polynomiales traduisent des objets géométriques plus complexes comme le cercle, la parabole, le cône..., que l'on appelle communément des variétés algébriques. Les variétés algébriques sont des objets déjà très généraux mais il leur manque encore un aspect topologique capable de prendre en compte les espaces ouverts (les variétés algébriques sont en effet des variétés fermées). C'est la notion de schéma qui permet de répondre à cette nouvelle généralisation [4].

3. Le dictionnaire est véritablement une métaphore adaptée à notre propos, car il faut rappeler que toute dualité (au sens d'adjonction), entre deux catégories A et B, induit une équivalence (un isomorphisme) entre A et B^{op} : l'équivalence correspond bien à une forme de traduction.

4. Historiquement, la notion de schéma a été introduite en 1958 par Grothendieck [79] pour

Méthodologiquement parlant, la notion de *schéma affine* inverse d'une certaine manière le point de vue offert par les variétés algébriques. Les variétés algébriques traduisent le point de vue géométrique des algèbres quasi-cohérentes, qui elles-mêmes traduisent le point de vue algébrique de l'ensemble des solutions d'un système d'équations polynomiales (à coefficients dans un corps commutatif K). Nous avons donc une relation triangulaire entre le point de vue analytique (les systèmes d'équations polynomiales), le point de vue algébrique (sous-catégorie d'anneaux) et le point du vue géométrique (schémas).

$$\begin{tikzcd}
\text{systèmes d'équations polynomiales} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \text{anneaux sur un corps algébriquement clos} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \text{variétés affines} &
\end{tikzcd}$$

Partant des systèmes d'équations polynomiales, la question est de savoir quelle structure algébrique leur correspond. La réponse est une sous-catégorie assez restreinte de la catégorie des anneaux : nous devons nous limiter aux "bons" anneaux (intègres, réduits, noethériens...). L'introduction des schémas affines, qui fut le coup de force de Grothendieck, répond alors à la question : quels objets géométriques correspondent à *tout* anneau, sans viser de point de vue analytique particulier ? Les schémas affines sont donc aux anneaux commutatifs avec identité ce que les variétés affines sont aux anneaux sur un corps algébriquement clos, comme le résume le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\text{variétés affines} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \text{anneaux sur un corps algébriquement clos} \arrow[d] \\
\text{schémas affines} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{anneaux commutatifs unifères}
\end{tikzcd}$$

2.2.3 Prolégomènes : anneaux, idéaux, spectres

Définition 1 (Anneau)**.** *Un* anneaux *est une structure algébrique munie de deux lois de composition internes : une loi additive et d'une loi multiplicative. La loi multiplicative est distributive bilatéralement (c'est-à-dire à gauche et à droite) par rapport à la loi additive.*

Un anneau est dit :

- *unifère* (ou unitaire) si la multiplication possède un élément neutre ;
- *commutatif* (ou abélien) si la loi de multiplication est commutative ;
- *intègre* si tout élément non nul de l'anneau est régulier pour la multiplication ;

démontrer les conjectures de Weil. C'est Deligne [40] qui parachèvera finalement sa démonstration.

Il est d'usage de nommer *pseudo-anneaux* les anneaux dépourvus d'élément neutre, et de nommer simplement *anneaux* ceux qui en sont pourvus. C'est cette convention que nous retiendrons : tout anneau est dorénavant implicitement unifère.

Définition 2 (Idéal)**.** *Soit A un anneau commutatif. Un* idéal *I de A est une partie de A est appelée* idéal à gauche *(respectivement* à droite*) de A lorsque :*

- *I est un sous-groupe additif de A ;*
- *pour tout a de A et tout x de I, $ax \in I$ (resp. $xa \in I$), i.e. I est stable sous multiplication à gauche (resp. à droite) par tout élément de A.*

Un idéal simultanément à gauche et à droite est dit bilatère*. Un idéal est dit* trivial *s'il est égal à $\{0\}$ ou A,* propre *s'il n'est pas trivial.*

Un anneau commutatif est dit *local* si il possède un unique idéal maximal.

Définition 3 (Ensemble quotient)**.** *Soient E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. On appelle* ensemble quotient *de E par la relation $\sim$ (ou ensemble E quotienté par $\sim$, ou ensemble E modulo $\sim$), noté $E/\sim$, l'ensemble des classes d'équivalence :*

$$E/\sim = \{[x] \mid x \in E\}.$$

Définition 4 (Anneau quotient)**.** *Soit A un anneau. L'addition et la multiplication de A sont compatibles avec une relation d'équivalence sur A si (et seulement si) celle-ci est de la forme : $x \sim y \leftrightarrow x - y \in I$, pour un certain idéal bilatère I de A. On peut alors munir l'ensemble quotient A/I de l'addition et de la multiplication quotients de celles de A :*

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I, \quad (x + I) \times (y + I) = (x \cdot y) + I.$$

*Ceci munit A/I d'une structure d'anneau, appelé l'*anneau quotient *de A par I.*

Soit A un anneau commutatif. Un idéal est dit :

- *premier* lorsque l'anneau-quotient A/P est intègre ;
- *maximal* s'il n'est contenu que dans exactement deux idéaux, lui-même et l'anneau tout entier.

Définition 5 (Spectre d'anneau)**.** *On appelle* spectre d'un anneau commutatif *A, noté* Spec A*, l'ensemble de ses idéaux premiers.*

Spec A apparait ainsi comme un espace topologique X. Nous allons maintenant voir comment il est possible de munir cet espace topologique d'une structure faisceautique pour définir une notion de schéma.

2.2.4 Faisceaux et schémas

Nous introduisons ici les notions de préfaisceau puis de faisceau sur un espace topologique[5]. Il existe des préfaisceaux d'ensembles, de groupes, d'anneaux ou de tout autre type de structures mathématiques. Ce sont ici les faisceaux d'anneaux qui nous intéressent.

5. Pour une définition générale de la notion de prefaisceau, se référer à la section 6.

Définition 6 (Morphisme d'anneaux)**.** *On appelle* morphisme d'anneaux *une application f entre deux anneaux A et B vérifiant les trois propriétés suivantes. Pour tous a, b dans A :*

(i) $f(a + b) = f(a) + f(b)$;

(ii) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$;

(iii) $f(1A) = 1B$.

Définition 7 (Préfaisceau d'anneaux)**.** *Soit X un espace topologique. On appelle* préfaisceau d'anneaux *$\mathcal{F}$ sur X la donnée, pour tout ouvert U de X, d'un anneau $\mathcal{F}(U)$ et, pour tout couple d'ouverts $U \subset V$ de X, d'un morphisme d'anneaux $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ tels que :*

1. *si $U \subset V \subset W$ sont des ouverts de X alors $\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W$;*
2. *pour tout ouvert U de X, ρ_U^U est l'identité de $\mathcal{F}(U)$:*
3. $\mathcal{F}(\varnothing) = \{0\}$.

Un préfaisceau d'anneaux n'est rien d'autre qu'un foncteur contravariant entre la catégorie des ouverts de X pour les morphismes inclusions et la catégorie des anneaux qui envoie l'objet initial $\varnothing$ sur l'objet terminal $\{0\}$.

Définition 8 (Faisceau d'anneaux)**.** *Soit X un espace topologique. On appelle* faisceau d'anneaux *ou* faisceau structural*, noté $\mathcal{O}_X$, un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X à valeur dans la catégorie des anneaux tel que, pour tout ouvert U de X, réunion d'une famille d'ouverts $\{U_i\}_I$, et pour toute famille $\{s_i\}_I$ de sections*[6] *de $\mathcal{F}$ sur les ouverts U_i, vérifiant $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, il existe une unique section s de $\mathcal{F}$ sur V telle que $s|_{U_i} = s_i$.*

La notion de faisceau d'anneaux peut alors être mise à profit dans la cadre du spectre d'anneau $\operatorname{Spec} A$ déjà défini.

$\operatorname{Spec} A$ apparait ainsi comme un espace topologique X, dont l'objectif est de le munir d'une structure d'espace localement annelé, c'est-à-dire du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ sur $X := \operatorname{Spec} A$.

Définition 9 (Espace localement annelé)**.** *On appelle* espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ *un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ sur X. Le faisceau $\mathcal{O}_X := \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ est appelé* faisceau structural *de l'espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$.*

On appelle espace localement annelé *un espace annelé $(X, \mathcal{O})$ tel que pour tout $x \in X$, l'anneau des germes de $\mathcal{O}_X$ est un anneau local.*

Définition 10 (Schéma)**.** *On appelle* schéma *un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ localement isomorphe au spectre d'un anneau. Cela signifie que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X, un anneau A et un isomorphisme d'espaces localement annelés $(U, \mathcal{O}_U) \simeq (SpecA, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$.*

Les schémas mènent alors naturellement à la notion de *morphisme de schémas*.

6. *Cf. infra* définition 48.

Définition 11 (Morphisme de schémas)**.** *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *deux schémas. On appelle* morphisme de schémas *de* $\rho : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ *un morphisme d'espaces localement annelés.*

On peut alors déduire la catégorie des schémas $\mathcal{Sch}$, comme sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement annelés [7], et on vérifie alors que la catégorie des schémas généralise la catégorie des variétés algébriques. En effet, si on ne considère que les schémas réduits, c'est-à-dire que les anneaux $\mathcal{F}(U)$ ne contenant pas de nilpotent non-nul, alors nous obtenons simplement des variétés algébriques.

Nous avons alors le théorème fondamental suivant :

Théorème 1. *L'application canonique* $\mathrm{Mor}(X, \mathrm{Spec}\, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{anneaux}}(A, \mathcal{O}_X)$ *est bijective et fonctorielle en* A *et en* X*.*

Ce théorème apparait particulièrement utile à l'étude de la dualité géométrico-algébrique, lorsqu'on considère des espaces localement annelés localement isomorphes à des espaces d'un certain type. C'est précisément le cas pour ceux qui sont localement isomorphes à $\mathrm{Spec}\, A$ pour un certain A. Ce cas particulier définit les schémas affines.

Définition 12 (Schéma affine)**.** *Soit* A *un anneau commutatif. On appelle* schéma affine *l'espace topologique* $X := \mathrm{Spec}\, A$ *muni du faisceau d'anneaux* $\mathcal{O}_X$ *sur* X*, appelé* faisceau structural *de* X*.*

En d'autres termes, un schéma affine est un espace localement annelé qui est localement isomorphe au spectre premier d'un anneau commutatif. Le théorème fondamental fournit alors une équivalence de catégorie entre la catégorie $\mathcal{Sch}$ des schémas affines et la catégorie $\mathcal{CRing}$ des anneaux commutatifs :

$$\mathcal{Sch} \simeq \mathcal{CRing},$$

ou alternativement une dualité (d'Isbell) entre la catégorie des schémas affines et la catégorie des anneaux commutatifs :

$$(\mathrm{Spec} \dashv \mathcal{O}) : \mathcal{Sch} \underset{\mathcal{O}}{\overset{\mathrm{Spec}}{\leftrightarrows}} \mathcal{CRing}^{\mathrm{op}}.$$

Nous renvoyons le lecteur à la dernière section pour de plus amples développements sur la dualité d'Isbell.

2.3 Géométrie algébrique dérivée : la dualité $\mathcal{DSt}_k \leftrightarrows \mathcal{DGA}_k^{\mathbf{op}}$

Cette section est une retranscription de Ben-Zvi et Nadler [17]. Nous renvoyons également le lecteur à Ben-Zvi et Nadler [16] et Vezzosi [185] pour une appréhension plus complète de la géométrie algébrique dérivée.

7. $\coprod X_i$ est la somme disjointe des X_i dans la catégorie des schémas.

2.3.1 De la géométrie algébrique à la géométrie algébrique dérivée

La géométrie algébrique dérivée est une forme de géométrie algébrique dans laquelle la notion habituelle d'anneau commutatif discret est remplacé par une généralisation homotopique. Cette branche de la géométrie algébrique est relativement récente et peut être considérée comme le point de rencontre entre la géométrie algébrique et la topologie algébrique (on la rencontre d'ailleurs également sous le nom de géométrie algébrique topologique). En effet, un anneau usuel correspond au zéroième-groupe d'homotopie d'un spectre d'anneau, de sorte qu'un spectre d'anneau peut être vu comme un enrichissement topologique d'un anneau usuel. Méthodologiquement parlant, nous aurions pu ne présenter que la dualité $\mathcal{DSt}_k \leftrightarrows \mathcal{DGA}_k^{\mathrm{op}}$, qui est le cas le plus général. Mais nous avons préféré en faire une présentation séparée, d'une part pour introduire plus en douceur l'un des fleurons de la géométrie algébrique contemporaine, et d'autre part pour respecter l'importance historique de la théorie des schémas, qui joua un rôle de détonateur dans le développement de la géométrie algébrique.

La géométrie algébrique dérivée prend appui sur les ∞-catégories, qui représentent une généralisation homotopique des catégories au sens usuel. Usuellement, une catégorie est une 1-catégorie, c'est-à-dire une catégorie composée d'objets et de 1-morphismes entre objets (les 0-morphismes pouvant être considérés comme les objets). Dans une 2-catégorie, il existe en outre des 2-morphismes entre 1-morphismes. De façon plus générale, une k-catégorie est une catégorie possédant des k-morphismes entre $k-1$-morphismes. Dans ce cadre, une ∞-catégorie est simplement une k-catégorie où $k \to \infty$. Les ∞-catégories présentent un grand intérêt du point de vue topologique, car les ∞-morphismes forment des espaces topologiques. En ce sens, on peut véritablement parler de "catégorie homotopique".

Dans cette section, la géométrie algébrique dérivée doit s'entendre comme géométrie algébrique *spectrale*, puisque son principe est de remplacer les anneaux commutatifs par des spectres d'anneaux commutatifs. Plus précisément, la géométrie algébrique spectrale est la théorie de la géométrie algébrique homotopique spécialisée à la ∞-catégorie des spectres. Il convient de ne pas la confondre avec deux acceptions connexes de la géométrie algébrique dérivée : la géométrie algébrique appliquée aux anneaux commutatifs simpliciaux (qui est une autre forme de géométrie algébrique *homotopique*), et la géométrie algébrique dérivée non-commutative. Par conséquent, les objets de la géométrie algébrique dérivée (homotopique) doivent s'entendre dans ce contexte : les *schémas dérivés* sont issus de spectres d'anneaux commutatifs, non d'anneaux commutatif simpliciaux.

2.3.2 Schémas dérivés et champs dérivés

Les objets de base de la géométrie algébrique dérivée sont les *champs dérivés.* Les champs dérivés sont aux schémas affines dérivés ce que les champs sont aux schémas affines. Quelques définitions s'imposent pour comprendre la nature particulière des champs dérivés.

Lorsqu'on généralise les anneaux aux spectres d'anneaux, plusieurs généralisations sont en réalité possibles. Le choix le plus judicieux est de se donner une algèbre graduée différentielle ($\mathcal{DG}$-algèbre) k sur les nombres rationnels.

Définition 13 ($\mathcal{DG}-k$-algèbre)**.** *On appelle* k-algèbre graduée différentielle *A,* *notée $\mathcal{DG}$-k-algèbra A, une k-algèbre graduée munie d'une différentielle $d : A \to A$ qui est soit de degré 1 (complexe de cochaines) soit de degré -1 (complexe de chaines) et qui satisfait les deux conditions suivantes :*

(i) $d \circ d = 0$.

(ii) $d(a \cdot b) = (da) \cdot b + (-1)^{\deg(a)} a \cdot (db)$*, où deg est le degré d'éléments homogènes.*

La condition (i) stipule que d donne à A une structure de complexe de chaînes ou de cochaines (suivant que la différentielle accroit ou baisse le degré) ; la condition (ii) que la différentielle respecte la règle graduée de Leibniz[8]. Il existe une définition alternative plus compacte : une $\mathcal{DG}$-algèbre est un monoïde dans la catégorie monoïdale des complexes de chaînes.

Définition 14 ($\mathcal{DG}$-k-algèbre dérivée)**.** *On appelle* $\mathcal{DG}$-k-algèbre dérivée *une $\mathcal{DG}$-k-algèbre commutative connexe ou coconnexe. On note $\mathcal{DGA}_k^-$ la ∞-catégorie des $\mathcal{DG}$-k-algèbres dérivées connexes, $\mathcal{DGA}_k^+$ la ∞-catégorie des $\mathcal{DG}$-k-algèbres dérivées coconnexes.*

On note $\mathcal{DGA}_k$ la ∞-catégorie des $\mathcal{DG}$-k-algèbres dérivées arbitraires (non nécessairement connexe ou coconnexe).

Définition 15 (Topologie étale)**.** *Soit X un schéma, on appelle topologie étale la catégorie $\mathfrak{Et}$ dont les objets sont des morphismes lisses non ramifiés d'un schéma U dans X et dont les morphismes sont les morphismes de X-schémas.*

Soient $\mathcal{S}$ la catégorie des ensembles simpliciaux et $\mathcal{Alg}_k$ la catégorie des k-algèbres commutatives discrètes. Par définition, la catégorie des schémas affines sur k est la catégorie opposée $\mathcal{Alg}_k^{\mathrm{op}}$. Sur cette base, on définit la notion de champ.

Définition 16 (Champ)**.** *On appelle* champ *sur k un foncteur $X : \mathcal{Alg}_k \to \mathcal{S}$ qui est un faisceau dans la topologie étale. On note $\mathcal{St}_k$ la ∞-catégorie des champs sur k.*

Cette définition implique en particulier que X préserve les colimites correspondantes aux recouvrements étales de schémas affines. Le plongement de Yoneda (*cf. infra*) nous donne un plongement plein et fidèle de $(\mathcal{DGA}_k^-)^{\mathrm{op}}$ vers la ∞-catégorie de foncteur $\mathcal{DGA}_k^- \to \mathcal{S}$, ce qui conduit à un foncteur plus général s'intéressant au recollement de schémas dérivés affines.

Définition 17 (Champ dérivé)**.** *On appelle* champ dérivé *sur k un foncteur $X : \mathcal{DGA}_k^- \to \mathcal{S}$ qui est un faisceau dans la topologie étale. On note $\mathcal{DSt}_k$ la ∞-catégorie des champs dérivés sur k.*

Cette définition implique en particulier que X préserve les colimites correspondantes aux recouvrements étales de schémas dérivés affines. Puisque $\mathcal{Alg}_k$ est une sous-catégorie pleine de $X : \mathcal{DGA}_k^-$, son inclusion en préserve les limites. De façon équivalente, puisque les schémas affines forment une sous-catégorie pleine des schémas dérivés affines, leur inclusion en préserve les colimites. Nous obtenons une adjonction de foncteurs entre champs et champs dérivés :

$$(r \dashv i) : \mathcal{St} \underset{i}{\overset{r}{\leftrightarrows}} \mathcal{DSt}_k,$$

8. On rappelle la règle de Leibniz de dérivation d'un produit de fonctions, appelée également règle du produit : $(fg)' = f'g + fg'$.

où le foncteur i est pleinement fidèle. Le foncteur r, qui prend un champ dérivé et restreint son domaine de la catégorie des $\mathcal{DG}$-k-algèbres dérivées à la catégorie des k-algèbres commutatives discrètes, admet le foncteur adjoint (à gauche) i qui, lui, étend par continuité le plongement des schémas affines vers les champs dérivés.

2.3.3 Affinisation

On s'intéresse maintenant aux relations entre un champ dérivé X et l'anneau commutatif des fonctions globales dérivées $\mathcal{O}(X)$ associé. Rappelons, d'après la section précédente, que nous avons l'adjonction entre le foncteur $\mathcal{O}$ des fonctions globales et le foncteur Spec du plongement des schémas affines vers les schémas :

$$(\mathrm{Spec} \dashv \mathcal{O}) : \mathcal{Sch} \underset{\mathcal{O}}{\overset{\mathrm{Spec}}{\leftrightarrows}} \mathcal{CRing}^{\mathrm{op}}.$$

Dans ce cadre, le foncteur d'affinisation est la monade [9]

$$\mathrm{Aff} = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O} : \mathcal{Sch}_k \to \mathcal{Sch}_k,$$

qui envoie un schéma X vers le spectre de son anneau de fonctions globales $\mathcal{O}(X)$.

À tout champ dérivé X, on peut assigner ses fonctions globales $\mathcal{O}$ comme algèbre commutative arbitraire :

$$X = \mathrm{colim}\,\mathrm{Spec}\,R_\alpha, \quad R_\alpha \in \mathcal{DGA}_k^-, \quad \mathcal{O}(X) = \lim R_\alpha \in \mathcal{DGA}_k.$$

$\mathcal{O}(X) \in \mathcal{DGA}_k^+$ si X est un champ, $\mathcal{O}(X) \in \mathcal{DGA}_k^-$ si c'est un champ dérivé. Mais les champs considérés correspondent au cas particulier des k-algèbres connexes. Il est possible de généraliser les résultats pour une k-algèbre quelconque, en introduisant le foncteur

$$\mathrm{Spec} = \mathcal{DGA}_k^{\mathrm{op}} \to \mathcal{DSt}, \quad \mathrm{Spec}(R)(A) = Hom_{\mathcal{DGA}_k}(R, A), \quad A \in \mathcal{DGA}_k^-,$$

associant à tout $R \in \mathcal{DGA}_k^{\mathrm{op}}$ le foncteur qui envoie R au champ correspondant A dans la catégorie restreinte $\mathcal{DGA}_k^-$ des k-algèbres connexes. Ben-Zvi et Nadler montrent alors que le foncteur $\mathrm{Spec} = \mathcal{DGA}_k^{\mathrm{op}} \to \mathcal{DSt}$ admet un foncteur adjoint associant à tout $X \in \mathcal{DSt}_k$ le foncteur qui envoie X au champ correspondant $\mathrm{Spec}\,R$ dans la catégorie élargie $\mathcal{DGA}_k$ des k-algèbres arbitraires. Nous obtenons l'adjonction suivante :

$$(\mathrm{Spec} \dashv \mathcal{O}) : \mathcal{DSt}_k \underset{\mathcal{O}}{\overset{\mathrm{Spec}}{\leftrightarrows}} \mathcal{DGA}_k^{\mathrm{op}},$$

qui est une dualité d'Isbell. La monade

$$\mathrm{Aff} : \mathcal{DSt}_k \to \mathcal{DSt}_k, \quad \mathrm{Aff}(X) = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}(X)$$

de cette adjonction s'appelle *foncteur d'affinisation*.

2.4 Topologie algébrique : la dualité $\mathcal{Sob} \leftrightarrows \mathcal{SFrm}^{\mathrm{op}}$

Pour composer cette section, nous nous sommes inspirés de Johnstone [97] pour les développements techniques, et Serfati [167] pour l'approche historique. Johnstone [97] est l'ouvrage de référence pour ce qui traite des dualités de type Stone. Nous renvoyons le lecteur à cet ouvrage pour un état des lieux complet sur le sujet. Serfati [167] représente une remarquable introduction non technique des espaces de Stone, focalisée sur l'apport historique originel de Stone.

9. *Cf. infra*, 2.6 Théorie des catégories pour la définition d'une monade (définition 42).

2.4.1 La dualité de Stone

Dans l'histoire moderne de la dualité géométrie-algèbre, la topologie tiens une place particulière. Elle tient cette place à la faveur de la contribution majeure de Stone dans la seconde moitié des années 30. À l'instar de Serfati [167], il n'est pas interdit de penser que, avec les théorèmes de représentation de Stone, l'étude des dualités mathématiques entre concret et abstrait prend un tournant décisif. Alors que le traité sur l'extension de Graßmann [78] ne suggère qu'implicitement la dualité entre algèbre et géométrie, ce qui le fait encore appartenir aux mathématiques modernes, les théorèmes de représentation de Stone formalisent explicitement cette dualité (entre algèbre et topologie plus précisément), ce qui lui vaut d'être une pierre fondatrice des mathématiques contemporaines.

La dualité de Stone ne traite pas à proprement parler d'une dualité unique. Si, à l'origine, dans une série d'articles, Stone [173] [175] [174] [177] s'est intéressé à la dualité entre les espaces totalement non connexes et les algèbres de Boole, il a rapidement étendu ses théorèmes de représentation à des objets plus généraux que les algèbres de Boole : les treillis distributifs, dont le dual sont les espaces cohérents spectraux ([176]). Par la suite, d'autres dualisations des treillis distributifs furent données, en termes de topologie d'ordre (avec les espaces de Priestley qui généralisent les espaces de Stone). La topologie d'ordre permit d'ailleurs de trouver les espaces d'Esakia, qui sont aux algèbres de Heyting ce que les espaces de Stone sont aux algèbres de Boole. Mais surtout, de nouvelles généralisations furent trouvées, étendant davantage encore les théorèmes de représentations. C'est la raison pour laquelle, aujourd'hui, nombre d'auteurs emploient le terme "dualité de Stone" non pour décrire la dualité de Stone *stricto sensu* (i.e. entre les espaces de Stone et les algèbres de Boole), mais une dualité de Stone générale — une "dualité de type Stone" — entre les espaces sobres et les treillis infiniment distributifs (*frames*). C'est cette dualité générale que nous présenterons dans cette section. Mais avant d'y venir, il n'est pas inutile de dire quelques mots sur la découverte historique de Stone.

Le point de départ est l'axiomatisation de ce que l'on appelait alors le "calcul de Boole". Il s'agissait, pour les successeurs de Boole, de dégager les structures abstraites des *Lois de la pensée* établies par Boole [21], de les "présenter" algébriquement plutôt que de les représenter. Avant Stone, ce besoin d'axiomatisation empruntait deux voies. La première était celle d'une structure équationnelle munissant l'algèbre abstraite $\mathcal{B}$ de lois de compositions binaires $\vee$ et $\wedge$, d'une loi de complémentation unaire -, de deux constantes 0 et 1, et respectant un certain nombre d'axiomes : commutativité, distributivité, idempotence, absorption, etc. La seconde était celle d'une structure d'ensemble ordonné munissant l'algèbre $\mathcal{B}$ d'une relation d'ordre $\leqslant$, d'une loi de complémentation unaire -, de deux constantes 0 et 1, définissant ainsi un treillis distributif complémenté. Le grand apport de Stone fut d'inaugurer une troisième voie empruntant une méthode très originale pour l'époque, celle de la théorie abstraite des idéaux.

Le problème était de savoir de quoi l'axiomatisation était-elle exactement le nom. En effet, une fois l'axiomatisation fixée, il restait à savoir comment les structures abstraites résultantes pouvaient être à leur tour "concrétisées", par une opération duale de représentation, pour vérifier que le concret originaire était bien celui visé. En somme, il fallait vérifier que l'axiomatisation de l'algèbre de Boole était bien *représentative*, en quelque sorte. Le problème de représentation se posait alors sous un autre jour, celui d'une équivalence — et donc d'une dualité — de catégories, entre une algèbre abstraite et une algèbre concrète. En substance, il fallait vérifier qu'il existe un ensemble (concret) E tel que l'algèbre abstraite $\mathcal{B}$ soit isomorphe à une algèbre de type $P(E)$, c'est-à-dire à une sous-algèbre de Boole de l'ensemble $P(E)$ de toutes les parties de E, de sorte que cette sous-algèbre soit une représentation (un ensemble concret) de $\mathcal{B}$. Or le problème était de taille, car cette propriété est fausse en général. Il n'y a aucune raison que la sous-algèbre $P(E)$ soit complète, i.e. contienne toute intersection ou réunion de ses parties. Au demeurant, il n'y a aucune raison qu'elle soit atomique, i.e. pourvue d'atomes.

Le coup de force de Stone fut de recourir à la théorie des idéaux dans un anneau commutatif. Pour ce faire, il fallait commencer par rabattre le problème sur une structure d'anneau, car la théorie idéale vit dans les anneaux. Très habilement, Stone va alors remplacer l'algèbre de Boole par un "anneau booléen". Il est en effet possible d'introduire une structure d'anneau commutatif en considérant la différence symétrique $\oplus$ comme loi de groupe, plutôt que la disjonction habituelle $\vee$, telle que $x \oplus y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$. Dans ce cas, la structure $(\mathcal{B}, \oplus, \wedge)$ définit un anneau commutatif, un "anneau booléen". Dès lors, comme le montre par exemple Serfati [167], Stone pouvait utiliser la théorie des idéaux, en introduisant le spectre $\mathrm{Spec}(P(E))$ comme ensemble de tous les idéaux de $P(E)$, tel que $\mathrm{Spec}(P(E)) = \{\mathrm{Ex}(x) | x \in E\}$ où $\mathrm{Ex}(x)$ est l'ensemble des parties du complémentaire de $x \in E$ (l'ensemble des parties de E qui ne contiennent pas x). Il ne restait plus alors qu'à introduire l'ensemble $\mathrm{Ex}(A)$ des parties du complémentaire de $A \in P(E)$, tel que $\mathrm{Ex}(A) = \{\Omega \in \mathrm{Spec}(P(E)) | A \notin \Omega\}$. Puisque toute partie $A \in E \in P(E)$ est représenté par l'ensemble $\mathrm{Ex}(A)$ des idéaux premiers, Stone pouvait alors conclure qu'une sous-algèbre F de $P(E)$ est isomorphe à une certaine sous-algèbre de Boole de $P(\mathrm{Spec}(E))$. Il s'ensuit une dualité entre la catégorie $\mathcal{Bool}$ des algèbres de Boole (treillis distributifs complémentés) et la catégorie $\mathcal{Stone}$ des espaces totalement non connexes, que l'on appellera plus tard "espaces de Stone" :

$$\mathcal{Stone} \leftrightarrows \mathcal{Bool}^{\mathrm{op}}$$

2.4.2 Premières généralisations

La dualité de Stone a ceci de particulier qu'elle traite de *catégories concrètes*, c'est-à-dire de catégories dont les objets sont des ensembles munis de certaines structures, et dont les morphismes sont des fonctions préservant ces structures. De plus, la dualité de Stone traite de *catégories localement petites*, c'est-à-dire que, pour chaque couple d'objets (A, B), les morphismes $A \to B$ forment un ensemble $\mathrm{hom}(A, B)$ plutôt qu'une classe propre. La question qui se pose est de savoir dans quelles mesures la dualité de Stone peut s'étendre à des catégories concrètes plus générales, c'est-à-dire à des catégories dont les objets forment seulement une classe propre.

Il se trouve qu'un lemme général garantit l'extension de la dualité de Stone à des catégories non localement petites. Ce lemme, très direct, énonce que si deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont duales l'une de l'autre, alors la limite inductive (ou colimite) de l'une est duale de la limite projective (ou limite) de l'autre [10]. En d'autres termes ce lemme énonce

$$\mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} \Rightarrow \mathrm{Ind}\text{-}\mathcal{C} \leftrightarrows \mathrm{Pro}\text{-}\mathcal{D}.$$

10. *Cf.* section 6 pour les définitions des notions catégoriques de limite inductive, limite projective, catégorie inductive, catégorie projective, etc.

Il est alors possible d'étendre la dualité de Stone dans le sens attendu, puisque Ind-$\mathcal{C}$ et Pro-$\mathcal{D}$ forment des catégories concrètes. La généralisation la plus immédiate consiste ainsi à étendre la dualité $\mathcal{Stone} \leftrightarrows \mathcal{Bool}^{\mathrm{op}}$ en une dualité $\mathcal{Stone}_f \leftrightarrows \mathcal{Bool}_f^{\mathrm{op}}$ à partir des catégories étendues $\mathcal{Stone}_f$ et $\mathcal{Bool}_f$ redéfinies en termes de structures finies.

Nous pouvons également reprendre la démarche de Stone et étendre la dualité aux treillis (finitairement) distributifs. Nous obtenons alors la dualité

$$\mathcal{Sob}_f \leftrightarrows \mathcal{DLat}_f^{\mathrm{op}}$$

entre la catégorie $\mathcal{Sob}_f$ des espaces sobres finis [11] et la catégorie $\mathcal{DLat}_f$ des treillis finitairement distributifs. Sur cette base, il est possible d'étendre la dualité dans deux directions, soit en considérant l'extension Ind-$\mathcal{DLat}_f$, soit en considérant l'extension Pro-$\mathcal{DLat}_f$. Le premier cas conduit à la dualité Pro-$\mathcal{Sob}_f \leftrightarrows$ Ind-$\mathcal{DLat}_f^{\mathrm{op}}$, et finalement, puisque $\mathcal{DLat} \simeq$ Ind-$\mathcal{DLat}_f$, à la dualité

$$\text{Pro-}\mathcal{Sob}_f \leftrightarrows \mathcal{DLat}^{\mathrm{op}},$$

le second à la dualité Ind-$\mathcal{Sob}_f \leftrightarrows$ Pro-$\mathcal{DLat}_f^{\mathrm{op}}$. Or on peut montrer que la catégorie Pro-$\mathcal{DLat}_f$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{StoneDLat}$, qui est la sous-catégorie pleine des treillis distributifs topologiques dont les espaces sous-jacents sont les espaces de Stone. Nous obtenons alors la dualité

$$\text{Ind-}\mathcal{Sob}_f \leftrightarrows \mathcal{StoneDLat}^{\mathrm{op}}.$$

Nous en venons finalement à la dualité la plus générale entre la catégorie $\mathcal{Sob}$ des espaces sobres dont les morphismes sont les fonctions continues et la catégorie $\mathcal{SFrm}$ des treillis spatiaux infiniment distributifs dont les morphismes sont les homomorphismes appropriés. Cette dualité est aujourd'hui bien connue pour être le point d'entrée de la "topologie sans points".

Mais il existe une autre stratégie pour généraliser la dualité de Stone. Plutôt que de partir des extensions Ind-$\mathcal{C}$ et Pro-$\mathcal{D}$ de deux catégories duales $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, nous pouvons partir des deux foncteurs d'oubli $O_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{Ens}$ et $O_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{Ens}$ et considérer leur foncteur adjoint respectif (à gauche) $L_{\mathcal{C}}$ et $L_{\mathcal{D}}$. En général, ces foncteurs adjoints existent, puisque les foncteurs d'oubli sont le plus souvent représentables [12]. Nous avons ainsi

$$O_{\mathcal{C}}(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Set}}(1, O_{\mathcal{C}}(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L_{\mathcal{C}}(1), X).$$

En notant respectivement $K_{\mathcal{C}}$ et $K_{\mathcal{D}}$ les images de $L_{\mathcal{D}}(1)$ et $L_{\mathcal{C}}(1)$ par dualité, nous obtenons les bijections suivantes :

$$O_{\mathcal{C}}(K_{\mathcal{C}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L_{\mathcal{C}}(1), K_{\mathcal{C}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_{\mathcal{D}}(1), K_{\mathcal{D}}) \simeq O_{\mathcal{D}}(K_{\mathcal{D}}).$$

Le raisonnement laisse entrevoir la détermination de l'ensemble K (dont sont issus les éléments $K_{\mathcal{C}}$ et $K_{\mathcal{D}}$ comme un ensemble "janusien" [13]. En effet, puisque le foncteur

11. La catégorie $\mathcal{Sob}_f$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{P}os_f$ des ensembles finis partiellement ordonnés.

12. cf. section 6 pour la définition d'un foncteur représentable. En particulier, un foncteur d'oubli est représenté par un couple (X, u) chaque fois que X est un objet libre sur un singleton de générateur u.

13. Johnstone qualifie de "schizophrénique" un tel ensemble. Nous préférons le terme "janusien" qui suggère mieux l'idée que ses éléments commutent.

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(., K_{\mathcal{D}})$ est un produit du foncteur d'oubli $\mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$, nous pouvons dire que $K_{\mathcal{D}}$ a la structure d'un objet de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$. Et, en appliquant le foncteur d'oubli $O_{\mathcal{D}}$ sur $K_{\mathcal{D}}$, on obtient $K_{\mathcal{C}}$, de sorte que l'ensemble K nous apparait comme ayant "deux visages commutatifs", la structure de $\mathcal{C}$ et celle de $\mathcal{D}$.

Cette propriété "janusienne" offre un nouveau point d'entrée pour l'étude de la dualité générale de Stone. Puisque la dualité $\mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ aboutit à un objet janusien K, une bonne stratégie consiste à faire le chemin inverse en partant à la recherche d'un tel objet. Et si celui-ci ne conduit qu'à une adjonction sans dualité entre les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, il suffit d'enrichir les structures de façon plus ou moins itérée, par exemple en raisonnant sur la catégorie $\mathcal{E} := \mathcal{D}^{\mathbb{T}}$ où $\mathbb{T}$ est la monade[14] induite par l'adjonction. Cette stratégie permet de générer un grand nombre de dualités, en considérant différents types de treillis et différentes structures topologiques. Johnstone étudie en particulier les cas où l'objet janusien K a comme support l'ensemble $2 := \{0, 1\}$. Les objets de type $2 := \{0, 1\}$ (munis de leurs propriétés algébriques et topologiques) sont précisément ceux qui aboutissent aux dualités de type Stone. Sont rangées dans cette catégorie la dualité de Stone déjà vue, la dualité de Lindenbaum-Tarski entre la catégorie $\mathcal{CBool}$ des algèbres de Boole complètes et la catégorie $\mathcal{E}ns$, la dualité entre la catégorie $\mathcal{CohSp}$ des espaces cohérents et la catégorie $\mathcal{DLat}$ des treillis distributifs, la dualité entre la catégorie $\mathcal{Pos}$ des ensembles partiellement ordonnés et la catégorie $\mathcal{StoneDLat}$ des treillis distributifs dont les espaces sous-jacents sont les espaces de Stone, la dualité entre la catégorie $\mathcal{SLat}$ des demi-treillis et la catégorie $\mathcal{StoneSLat}$ des demi-treillis dont les espaces sous-jacents sont les espaces de Stone, etc. Nous allons maintenant détailler l'une d'entre elle, qui a le privilège d'être plus générale : la dualité entre la catégorie $\mathcal{Sob}$ des espaces sobres et la catégorie $\mathcal{SFrm}$ des treillis (infiniment) distributif spatiaux, que nous nommerons pour simplifier *frames*[15].

2.4.3 Treillis, locales, *frames*

Définition 18 (EPO)**.** *Soit P un ensemble. On appelle* ensemble partiellement ordonné*, en abrégé* EPO*, sur P une relation binaire $\leqslant$*

(i) réflexive : pour tout $x \in P$, $x \leqslant x$;

(ii) transitive : si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$;

(iii) antisymétrique : si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$.

Définition 19 (Supremum, infimum)**.** *Soit P un EPO et S un sous-ensemble de P. On appelle* supremum *(resp.* infimum*) de S un élément $x \in P$, noté abrégé $x = \bigvee S$ (resp. $x = \bigwedge S$), tel que*

(i) x est une borne supérieure (resp. inférieure) pour S, i.e. $s \leqslant x$ (resp. $x \leqslant s$) pour tout $s \in S$;

(ii) si, pour tout $s \in S$, y satisfait $s \leqslant y$, alors $x \leqslant y$ (resp. $y \leqslant x$).

14. *Cf. infra*, 2.6 Théorie des catégories pour la définition d'une monade (définition 42).
15. Il n'existe pas, à notre connaissance, de traduction véritablement établie de la notion de frame. C'est pourquoi nous utilisons le terme anglais.

Un supremum (resp. un infimum) n'est donc rien d'autre qu'une borne supérieure (resp. inférieure). C'est un sup-demi-treillis ayant un seul élément minimal et un inf-demi-treillis ayant un seul élément maximal. Le supremum d'un EPO est le plus petit de ses majorants, et l'infimum le plus grand de ses minorants. Dans beaucoup d'EPO, les suprema et les infima n'existent pas, mais quand ils existent, l'axiome d'antisymétrie (iii) assure leur unicité. On démontre aisément les propriétés suivantes pour tout x, y, z :

(i) $x \vee x = x$ et $x \wedge x = x$;

(ii) $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x$;

(iii) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ et $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;

(iv) $x \vee 0 = x$ et $x \wedge 1 = x$.

(iv) $x \vee 1 = 1$ et $x \wedge 0 = 0$.

Ces propriétés définissent ainsi les structures $(P, \vee, 0)$ et $(P, \wedge, 1)$ comme des demi-groupes unifères commutatifs (des monoïdes commutatifs) dont chaque élément est idempotent.

Définition 20 (Demi-treillis, treillis)**.** *Soient P un EPO. P est appelé*

(i) sup-demi-treillis *s'il est muni d'une structure $(P, \vee, 0)$;*

(ii) inf-demi-treillis *s'il est muni d'une structure $(P, \wedge, 1)$;*

(iii) treillis *s'il est muni d'une structure $(P, \vee, \wedge, 0, 1)$.*

Un treillis est ainsi un EPO dans lequel chaque paire d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure. On démontre aisément qu'un treillis possède les lois d'absorption $x \wedge (x \vee y) = x$ et $x \vee (x \wedge y) = x$ pour tout $x, y \in P$. Notons qu'un treillis peut être muni de la loi de distributivité additionnelle $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Dans ce cas, on montre sans difficulté que la loi duale $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ est également valable. Il est également possible de munir la structure $(P, \vee, \wedge, 0, 1)$ d'une opération additionnelle unaire de complémentation $\neg : P \to P$, $x \mapsto \neg x$ telle que $x \vee \neg x = 1$, $x \wedge \neg x = 0$ et $\neg\neg x = x$. On obtient alors une algèbre de Boole. Si la complémentation satisfait seulement la loi $x \wedge \neg x = 0$, nous obtenons une algèbre de Heyting.

Nous introduisons maintenant une notion d'espace topologique appelée *locale*. Les locales représentent une catégorie particulière de treillis. Elles sont définies par leurs ouverts, ce qui en font des objets très proches des espaces topologiques. La catégories des locales, notée $\mathcal{Loc}$, est définie comme la catégorie opposée de la catégorie $\mathcal{Frm}$ des *frames*.

Définition 21 (*Frame*)**.** *On appelle* frame *un treillis dont tous les suprema et les infima finis satisfont la loi de distribution infinie suivante*

$$x \wedge \bigvee_S = \bigvee_{s \in S} (x \wedge s)$$

Définition 22 (Homomorphisme de *frames*)**.** *Soient A et B deux frames. On appelle* homomorphisme de frames *$f : A \to B$ une fonction préservant les suprema arbitraires et les infima finis.*

On note $\mathcal{Frm}$ la catégorie dont les objets sont les *frames* et dont les morphismes sont les homomorphismes de *frames*. On note $\mathcal{Loc} := \mathcal{Loc}^{\mathrm{op}}$ la catégorie opposée des locales, dont les objets sont appelés "*frame* des sous-espaces ouverts de X" et généralement notés $O(X)$, et dont les morphismes sont des correspondances continues de locales $g : X \to Y$ telles que $g* : O(Y) \to O(X)$ sont des homomorphismes de *frames*. Une locale peut ne pas posséder de point ; dans ce cas, elle n'en demeure pas moins un espace, muni de vraies propriétés géométriques. Si elle possède en revanche suffisamment de points, c'est un espace topologique sobre. C'est ce dernier cas qui nous intéresse plus particulièrement, car il dessine une dualité entre treillis et espace topologique

2.4.4 La dualité $\mathcal{Sob} \leftrightarrows \mathcal{SFrm}^{\mathrm{op}}$

Tout espace topologique X peut être défini en termes de frame d'ouverts $O(X)$, et par suite en termes de locale X_L. Pour toute fonction continue $f : X \to Y$ entre espaces topologiques, la correspondance inverse $f^{-1} : O(Y) \to O(X)$ est un homomorphisme de *frames*, de sorte que f induit une correspondance continue $f_L : X_L \to Y_L$ de locales. Nous avons donc un foncteur

$$F_L : \mathcal{Top} \to \mathcal{Loc}.$$

Réciproquement, si X est une locale, nous pouvons définir un point de X comme correspondance continue $1 \to X$, où 1 est la locale terminale, l'objet terminal de l'espace topologique. Nous avons donc $O(1) = P(1)$, où $P(1)$ est l'ensemble des parties de 1 (i.e. l'ensemble 2 des valeurs de vérité). Les éléments de $O(X)$ induisent une topologie sur l'ensemble des points de X, donnant lieu à un espace topologique X_P. Toute correspondance continue $f : X \to Y$ de locales induit une correspondance continue $G_P : X_P \to Y_P$ d' espaces. Nous avons donc un foncteur

$$G_P : \mathcal{Loc} \to \mathcal{Top},$$

qui n'est autre que le foncteur adjoint à gauche du foncteur F_L.

De plus, la monade et la comonade de cette adjonction sont idempotentes. En effet, si l'on note respectivement η et ϵ l'unité et la counité de cette adjonction, on peut montrer que $G_P \epsilon F_L$ et $F_L \eta G_P$ sont des isomorphismes naturels . La catégorie $\mathcal{Top}$ des espaces topologiques et la catégorie $\mathcal{Loc}$ des locales sont ainsi liées par l'adjonction idempotente

$$(F_L \dashv G_P) : \mathcal{Top} \underset{F_L}{\overset{G_P}{\leftrightarrows}} \mathcal{Loc}.$$

Or, nous savons qu'une adjonction $F_L \dashv G_P$ idempotente définit une équivalence de catégories entre les images pleines de F_L et de G_P (cf. 1.6 définition 47). Si $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{D}$, l'image pleine est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ dont les objets appartiennent à $\mathcal{C}$. L'adjonction $F_L \dashv G_P$ définit ainsi une équivalence de catégorie entre les sous-catégories $\bar{im} F_L$ et $\bar{im} G_P$ que l'on peut respectivement identifier à la catégorie des espaces sobre et la catégories des locales spatiales.

Définition 23 (Espace sobre)**.** *On appelle* espace sobre *un espace topologique X tel que $X \cong X_{LP}$. On note $\mathcal{Sob}$ la catégorie des espaces sobres.*

Définition 24 (Locale spatiale)**.** *On appelle* locale spatiale *une locale X telle que $X \cong X_{PL}$. On note $\mathcal{SLoc}$ la catégorie des locales spatiales. On parle également de locale topologique.*

Nous obtenons ainsi une équivalence de catégorie entre la (sous-)catégorie $\mathcal{Sob}$ des espaces sobres et la (sous-)catégorie $\mathcal{SLoc}$ des locales spatiales.

L'intérêt de la catégorie des locales spatiales (par rapport à la catégorie des locales) est qu'elle est "bien pointée", c'est-à-dire qu'elle possède "assez de points". Cette propriété garantit que les morphismes de la catégorie sont toujours bien différenciées, même si on les compose avec des morphismes de l'objet terminal 1. En d'autres termes, si $f, g : X \to Y$ sont deux morphismes tels que $f \neq g$ et si $p : 1 \to X$ alors $f \circ p \neq g \circ p$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend left, "f\circ p"] \arrow[rr, bend right, "g\circ p"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2.2 – Catégorie bien pointée, telle que $(f \neq g) \Rightarrow (f \circ p \neq g \circ p)$

Finalement, nous pouvons introduire la catégorie duale $\mathcal{SFrm} = \mathcal{SLoc}^{\mathrm{op}}$ pour faire explicitement apparaitre l'équivalence de catégorie comme une dualité d'Isbell :

$$\mathcal{Sob} \leftrightarrows \mathcal{SFrm}^{\mathrm{op}}.$$

2.5 Analyse fonctionnelle : la dualité $\mathcal{Top}_{etc} \leftrightarrows \mathcal{Stell}^{\mathbf{op}}_{com}$

Pour composer cette section, nous nous sommes inspirés de Conway [34] et Murphy [135] qui sont des références classiques. On pourra également consulter Kadison et Ringrose [100] [101] ainsi que Takesaki [179], qui sont d'autres ouvrages de référence.

2.5.1 Le point de vue fonctionnel sur les espaces

Les développements de la géométrie algébrique et de la topologie algébrique nous enseignent que les espaces sont fondamentalement construits ; ils le sont par une opération spectrale. Auparavant guidée par l'inventorisation des formes géométriques déjà connues (géométrie algébrique) ou par l'axiomatisation des algèbres concrètes (topologie algébrique), l'algèbre a fini par s'émanciper pour imposer ses propres objets géométriques, d'un nouveau genre, donnant une forme de primat à l'algèbre. Les schémas (géométrie algébrique) et les espaces de Stone (topologie algébrique) peuvent ainsi apparaitre comme les nouveaux espaces conquis par l'algèbre.

Il se trouve que ce renversement se retrouve — signe de son importance — en analyse. On trouve en effet, dans le contexte de l'analyse fonctionnelle, un changement de point de vue similaire, qui consiste à passer d'une notion standard (ensembliste) d'espace (défini à partir de points), à une notion plus constructive, où les points de l'espace sont construits à partir de fonctions. Il s'agit bien d'un renversement similaire ; au lieu de voir la fonction comme fonction fixe d'un point variable de l'espace considéré, on observe le point comme fixe et on considère son spectre obtenu à partir de fonctions variables sur l'espace considéré. Il s'ensuit une dualité voisine entre les objets fonctionnels et les objets spatiaux qu'ils génèrent. De fait, comme l'a montré par exemple Johnstone [97], cette dualité peut être établie sur le même modèle que la dualité générale de Stone, en considérant des objets janusiens d'un type particulier ; plutôt que de partir d'un objet de type $2 := \{0, 1\}$, les dualités de l'analyse fonctionnelle consistent à partir d'un objet de type $\mathbb{R}$ muni d'une double structure d'espace topologique et d'anneau commutatif. Nous allons cependant aborder ces dualités de façon plus euristique, par le biais de l'analyse fonctionnelle.

En réalité, il existe au moins trois niveaux d'analyse pour réaliser cette dualité, selon qu'on considère des espaces mesurés, des espaces topologiques ou des espaces riemanniens.

- Si on considère des espaces mesurés, on est dans le domaine de la théorie de la mesure et l'algèbre associée est l'algèbre $L^\infty(X)$ des fonctions mesurables essentiellement bornées sur X ;
- Si on considère des espaces topologiques, on est dans le domaine de la topologie et l'algèbre associée est l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur X ;
- Si on considère des espaces riemanniens, on est dans le domaine de la géométrie différentielle et riemanienne et l'algèbre associée est l'algèbre $C^\infty(X)$ des fonctions lisses sur X.

Nous avons alors des théorèmes fondamentaux pour chacune des typologies d'espace et de fonctions :

- Théorème de von Neumann : toute algèbre de von Neumann commutative est isomorphe en tant qu'algèbre de von Neumann à une algèbre $L^\infty(X)$ [16] ;
- Théorème de Gelfand : toute $C*$-algèbre commutative est isomorphe à une algèbre $C(X)$;
- Théorème de Connes : tout triplet spectral vérifiant certains axiomes est isomorphe à un triplet spectral d'une variété riemannienne.

Nous nous limiterons dans ce chapitre aux espaces topologiques, sachant qu'il existe une construction permettant de passer des espaces topologiques aux espaces mesurés. Les espaces riemanniens ne seront pas abordés ici car d'un accès trop ardu par rapport à l'ambition de ce chapitre.

2.5.2 Algèbres de Banach et algèbres stellaires

Définition 25 ($\mathbb{C}$-algèbre de Banach)**.** *On appelle* $\mathbb{C}$-algèbre de Banach $\mathcal{A}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre normée complète* $(\mathcal{A}, \|.\|)$ *telle que pour tout* $a, b \in \mathcal{A}$*,* $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$*.*

Une algèbre de Banach contenant une unité 1 est appelée *unifère*. Une algèbre de Banach non-unifère peut être pourvue d'unité de la façon suivante :

16. Les algèbres de von Neumann commutatives sont des algèbres de fonctions mesurables sur un espace X et puisqu'elles sont aussi des $C*$-algèbres commutatives, étant donnée une algèbre de von Neumann commutative M, il existe un espace topologique localement compact $Y \neq X$ tel que $M = C(Y)$ et Y n'est pas, en général, une variété.

Proposition 1 (Adjonction d'unité)**.** *Soit A une algèbre de Banach non-unifère. On peut lui adjoindre une unité en définissant l'algèbre $A^+ = A \times \mathbb{C}$ avec la multiplication $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$. L'algèbre A^+ est alors une algèbre de Banach lorsqu'elle est munie de la norme $\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$.*

Démonstration. Par exemple [135] ou [34] □

Définition 26 (Spectre)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unifère et $a \in \mathcal{A}$. On appelle* spectre *de a, noté $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$, l'ensemble*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} | (a - \lambda.1) \text{ n'est pas inversible}\}$$

.

Définition 27 (Rayon spectral)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unifère et $a \in \mathcal{A}$. On appelle* rayon spectral *de a, noté $r(a)$, le réel*

$$r(a) := \sup_{\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)} |\lambda|.$$

Définition 28 (Involution)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre. On appelle* involution *sur $\mathcal{A}$ une application $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ qui est :*

- additive *: pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, $(a + b)^* = a^* + b^*$.*
- antilinéaire *: pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$.*
- antimultiplicative *: pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, $(ab)^* = b^* a^*$.*

Définition 29 (Algèbre stellaire)**.** *On appelle* C^*-algèbre *ou* algèbre stellaire *une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach $\mathcal{A}$ munie d'une involution * telle que pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\|a^* a\| = \|a\|$.*

Définition 30. *Soit $a \in \mathcal{A}$. a est appelé*

1. autoadjoint *si $a^* = a$;*
2. normal *si $a^* a = aa^*$;*
3. unitaire *si $a^* a = 1 = aa^*$;*
4. *une* projection *si $a^2 = a^* = a$;*
5. *une* isométrie *si $a^* a = 1$.*

Les propositions (1) et (2) font sens dans la mesure où $\mathcal{A}$ n'est pas unifère. Pour les autres il faut commencer par ajouter une unité à $\mathcal{A}$, à l'instar de l'adjonction d'une unité aux $\mathbb{C}$-algèbres de Banach.

Nous allons maintenant voir comment l'information topologique est entièrement encodée dans les objets algébriques propres au algèbres stellaires.

2.5.3 La transformation de Gelfand

Proposition 2. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire et $a \in \mathcal{A}$, alors on a $r(a) = \lim \|a^n\|^{1/n}$. De plus, si a est normal alors on a $r(a) = \|a\|$.*

Proposition 3. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire et $a \in \mathcal{A}$, alors $\|a\| = \sqrt{r(a^*a}$.*

Corollaire 1. *Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux algèbres stellaires et $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un *-homomorphisme. Alors ϕ est injectif si et seulement si il est isométrique.*

Théorème 2 (Calcul fonctionnel holomorphe)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unifère et $a \in \mathcal{A}$, G un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\sigma(a)$ et $\Gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ un contour orienté enlaçant $\sigma(a)$ et f une fonction holomorphe sur G. Alors la formule*

$$f(a) := \int_\Gamma f(z)(z-a)^{-1} dz$$

définit un élément de $\mathcal{A}$ indépendant du contour choisi. De plus,

1. *L'application $Hol(a) \to \mathcal{A}$ est un morphisme d'algèbres stellaires $Hol(a)$ désignant l'algèbre des fonctions holomorphes au voisinage de $\sigma(a)$.*
2. *Si $f(z) = \sum \alpha_k z^k$ a un rayon de convergence $r > r(a)$ alors $f(a) = \sum \alpha_k a^k$.*

Lorsque l'algèbre de Banach est en oute une algèbre stellaire, ces résultats peuvent être grandement améliorés pour les éléments normaux.

Théorème 3 (Calcul fonctionnel continu)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire et $a \in \mathcal{A}$ un élément normal. Alors l'application $P \mapsto P(a)$, définie sur les fonctions polynômiales sur $\sigma(a)$ est une isométrie. Elle admet donc par le théorème de Stone-Weierstrass un unique prolongement en une application $C(\sigma(a)) \to C^*(a)$ qui est un isomorphisme isométrique. De plus, on a, pour tout $f \in C(\sigma(a))$,*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Cette dernière partie du théorème est connue sous le nom de *théorème spectral.*
On s'intéresse maintenant aux algèbres de Banach commutatives.

Définition 31 (Caractère)**.** *Un* caractère *d'une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est un morphisme d'algèbre non nul $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$. On appelle* spectre *de $\mathcal{A}$, noté* $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$*, l'ensemble des morphismes d'algèbres de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$.*

Proposition 4. *Soit $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un morphisme d'algèbres, alors ϕ est continu et $\|\phi\| \leqslant 1$.*

Théorème 4 (Banach-Alaoglu)**.** *La boule unité de $\mathcal{A}^*$ munie d sa topologie faible-* est un espace compact.*

Il s'ensuit que $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ est un espace compact, et on déduit le théorème suivant, appelé transformation de Gelfand

Définition 32 (Transformation de Gelfand)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative. On appelle* transformation de Gelfand *l'application*

$$\mathcal{A} \to C(\mathrm{Spec}(\mathcal{A})) \tag{2.1}$$

$$a \mapsto (h \to h(a)) \tag{2.2}$$

Théorème 5 (Gelfand)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative telle que* Spec($\mathcal{A}$) *est non vide. La transformation de Gelfand est un morphisme faisant décroître la norme.*

Théorème 6 (Gelfand-Naimark)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire commutative. La transformation de Gelfand est un *-isomorphisme isométrique de $\mathcal{A}$ sur $C(\mathrm{Spec}(\mathcal{A}))$.*

2.5.4 La dualité de Gelfand

La dualité de Gelfand est la traduction du théorème de Gelfand-Naimark en termes de catégories, entre la catégorie des espaces topologiques compacts et la catégorie des algèbres stellaires commutatives.

Définition 33. *On note*

- $\mathcal{Stell}$ *la catégorie dont les objets sont les algèbres stellaires et les morphismes les fonctions continues.*
- $\mathcal{Stell}_{com} \subset \mathcal{Stell}$ *la sous-catégorie pleine des algèbres stellaires commutatives.*

et

- $\mathcal{Top}_{Haus}$ *la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques de Hausdorff et les morphismes les *-homomorphismes.*
- $\mathcal{Top}_{etc} \subset \mathcal{Top}_{Haus}$ *la sous-catégorie pleine des espaces topologiques compacts.*

La transformation de Gelfand définit alors un foncteur contravariant de la catégorie $\mathcal{Stell}_{com}$ vers la catégorie $\mathcal{Top}_{etc}$.

Définition 34. *On note*

$$\begin{array}{rlcl} \mathrm{Spec} : & \mathcal{Stell}_{com}^{op} & \to & \mathcal{Top}_{etc} \\ & \mathcal{A} & \mapsto & \mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \\ & \phi & \mapsto & \mathrm{Spec}(\phi) \end{array}$$

le foncteur qui associe à tout algèbre stellaire topologique $\mathcal{A}$ l'ensemble des caractères $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) = \{x : \mathcal{A} \to \mathbb{C}\}$ *muni d'une topologie spectrale, et à tout *-homomorphisme $\phi : X \to Y$ un morphisme* $\mathrm{Spec}(\phi)$*.*

Ce foncteur est l'inverse du foncteur également contravariant qui associe à tout espace topologique compact de $\mathcal{Top}_{etc}$ une algèbre stellaire commutative de $\mathcal{Stell}_{com}^{\mathrm{op}}$.

Définition 35. *On note*

$$\begin{array}{rlcl} C : & \mathcal{Top}_{etc} & \to & \mathcal{Stell}_{com}^{op} \\ & X & \mapsto & C(X) \\ & f & \mapsto & C(f) \end{array}$$

le foncteur qui associe à tout espace topologique compact X une algèbre de fonctions continues $C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} | f \text{ continues}\}$ munies d'une structure d'algèbre stellaire, et à toute fonction $f : X \to Y$ un morphisme $C(f)$.

Nous avons donc les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(C(X)) \arrow[r, "\mathrm{Spec}\, Cf"'] & \mathrm{Spec}(C(Y))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[d] \\
C(\mathrm{Spec}(\mathcal{A})) \arrow[r, "C\, \mathrm{Spec}\, \phi"'] & C(\mathrm{Spec}(\mathcal{B}))
\end{tikzcd}
$$

On en déduit une équivalence de catégorie et par suite une dualité.

Théorème 7 (Dualité de Gelfand)**.** *La transformation de Gelfand définit une dualité d'Isbell entre la catégorie $\mathcal{Stell}$ des C^*-algèbres commutatives munies des *-homomorphismes et la catégorie $\mathcal{Top}_{etc}$ des espaces topologiques loclement compacts munis des applications propres :*

$$(\mathrm{Spec} \dashv C) : \mathcal{Top}_{etc} \underset{C}{\overset{\mathrm{Spec}}{\leftrightarrows}} \mathcal{Stell}^{op}_{com}.$$

Nous obtenons également, de façon alternative une équivalence de catégorie entre les catégories $\mathcal{Top}_{etc}$ et $\mathcal{Stell}^{\mathrm{op}}_{com}$. Ce théorème signifie que la totalité de l'information topologique des espaces localement compacts est "encodée" dans l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$. On peut noter que ce résultat reste valable dans le cas des algèbres stellaires commutatives non-unifères, à condition de redéfinir le dual comme la catégorie des objets pointés dans $\mathcal{Top}_{etc}$.

Plus généralement, il existe un véritable dictionnaire permettant de dualiser les sous-catégories d'espaces topologiques par des sous-catégories d'algèbres stellaires. Par exemple, un espace topologique connexe est dualisé par une algèbre stellaire sans projecteur, un espace topologique d'ouverts est dualisé par une algèbre stellaire d'idéaux bilatères fermés, un espace topologique de fermés est dualisé par une algèbre stellaire de quotients, etc.

2.6 Théorie des catégories : la dualité $\mathcal{CoPSh} \leftrightarrows \mathcal{PSh}$

Cette section finale a deux ambitions. La première est de présenter les principaux outils catégoriques utilisés dans ce volume (aussi bien dans les précédentes sections que dans les chapitres suivants). La seconde est de mettre en évidence l'unité paradigmatique de la thèse qui est le point d'orgue de cette section : la dualité d'Isbell.

Pour composer cette section, nous nous sommes inspirés de Asperti et Longo [11], Lawvere et Schanuel [115], Mac Lane [123], Prouté [147], et du wiki-lab nLab. On trouvera par ailleurs des ouvertures stimulantes dans Lawvere [109] [112] ainsi que dans l'inépuisable wiki-lab nLab.

2.6.1 Premiers concepts

Définition 36 (Catégorie)**.** *Une* catégorie $\mathcal{C}$ *est la donnée de :*

- *deux collections* $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ *et* $\mathbf{Mor}(\mathcal{C})$ *dont les éléments sont appelés respectivement* objets *et* morphismes *de* $\mathcal{C}$ *;*
- *deux applications* $\mathbf{s} : \mathbf{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ *et* $\mathbf{t} : \mathbf{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ *appelées respectivement* sources *et* but *;*
- *une application* $\mathbf{1} : \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Mor}(\mathcal{C})$, $X \mapsto \mathbf{1}_X$ *appelée* identité *;*
- *une application partielle* $\mathbf{Mor}(\mathcal{C}) \times \mathbf{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Mor}(\mathcal{C})$, $(f, g) \mapsto g \circ f$, *définie sur les seuls couples* (f, g) *tels que* $\mathbf{t}(f) = \mathbf{s}(g)$, *appelée* composition.

Ces données sont soumises aux axiomes suivants :

- *pour tout objet* X, $\mathbf{s}(\mathbf{1}_X) = \mathbf{t}(\mathbf{1}_X) = X$ *;*
- *pour tous morphismes composables* f *et* g, $\mathbf{s}(g \circ f) = \mathbf{s}(f)$ *et* $\mathbf{t}(g \circ f) = \mathbf{t}(g)$ *;*
- *pour tout morphisme* f *de source* X *et de but* Y, $\mathbf{1}_Y \circ f = f \circ \mathbf{1}_X = f$ *;*
- *pour tous morphismes* f, g *et* h, *telles que les couples* (f, g) *et* (g, h) *sont composables,* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Remarque 1. *Les objets d'une catégorie peuvent être vue comme des 0-morphismes.*

Définition 37 (Catégorie localement petite)**.** *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie et* X *et* Y *deux objets de* $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ *est dite* localement petite *si, pour tout* X *et* Y *de* $\mathcal{C}$, *la collection des morphismes de* X *vers* Y, *notée* $C(X, Y)$, *est un ensemble.*

Définition 38 (Foncteur)**.** *Soient* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$ *deux catégories et* X *et* Y. *On appelle* foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *la donnée de deux applications* $\mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \xrightarrow{F} \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$ *et* $\mathbf{Mor}(\mathcal{C}) \xrightarrow{F} \mathbf{Mor}(\mathcal{D})$ *respectant la structure de catégorie, c'est-à-dire telles que :*

- $F(\mathbf{s}(f)) = \mathbf{s}(F(f))$ *et* $F(\mathbf{t}(f)) = \mathbf{t}(F(f))$, *pour tout morphisme* f *de* $\mathcal{C}$ *;*
- $F(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_{F(X)}$ *pour tout objet* X *de* $\mathcal{C}$ *;*
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ *pour tous morphismes composables* f *et* g *de* $\mathcal{C}$.

Définition 39 (Transformation naturelle)**.** *Soient* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$ *deux catégories et* $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *deux foncteurs. On appelle* transformation naturelle $\phi : F \to G$ *une application* $\phi : \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Mor}(\mathcal{D})$ *telle que* $\phi_Y \circ F(f) = G(f) \circ \phi_X$ *pour tout morphisme* f *de* $\mathcal{C}$. *On note* $\mathbf{Nat}(F, G)$ *la collection des transformations naturelle.*

Définition 40 (Isomorphisme)**.** *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie. Un morphisme* $f : X \to Y$ *de* $\mathcal{C}$ *est appelée un* isomorphisme *s'il existe un morphisme* $g : Y \to X$ *telle que* $g \circ f = 1_X$ *et* $f \circ g = 1_Y$.

Définition 41 (Adjonction)**.** *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et $(\mathcal{C} \xrightarrow{G} \mathcal{D}, \mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ une paire de foncteurs tels que la source de l'un soit la cible de l'autre. On appelle* adjonction *de F à G un isomorphisme naturel entre les foncteurs $(X, Y) \to D(F(X), Y)$ et $(X, Y) \to C(X, G(Y))$ de $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$ vers $\mathfrak{Ens}$. Si une telle adjonction existe, on dit que F est adjoint à gauche de G, ou que G est adjoint à droite de F. On le note $F \dashv G$.*

Définition 42 (Monade)**.** *Soit une adjonction $F \dashv G$ ayant pour unité $\eta : \mathsf{id} \mapsto G \circ F$ et co-unité $\varepsilon : F \circ G \mapsto \mathsf{id}$. Alors le foncteur $T = G \circ F$, muni des transformations $\eta : \mathsf{id} \mapsto T$ et $\mu = G(\varepsilon F) : T \circ T \mapsto T$ forme une* monade.

Définition 43 (Catégorie squelettique)**.** *Une catégorie $\mathcal{C}$ est appelée* squelettique *si tout objet de $\mathcal{C}$ n'est isomorphe qu'à lui-même.*

Définition 44 (Équivalence de catégorie)**.** *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est appelé une* équivalence de catégories *s'il existe un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et des isomorphismes naturels $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ et $\epsilon : F \circ G \to 1_{\mathcal{D}}$.*

Définition 45. *Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit :*

- plein *si pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$, $F : C(X, Y) \to D(F(X), F(Y))$ est surjective ;*
- fidèle *si cette même application est injective ;*
- pleinement fidèle *s'il est à la fois plein et fidèle ;*
- essentiellement surjectif *si tout objet de $\mathcal{D}$ est isomorphe à un objet de la forme $F(X)$.*

Définition 46 (Catégorie de foncteur)**.** *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. On appelle* catégorie des foncteurs *de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$, notée $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, la catégorie dont les objets sont les foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ et dont les morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs.*

Définition 47 (Image pleine)**.** *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. On appelle* image pleine *de F la catégorie $\bar{im} F_L$ dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes $X \to Y$ sont les morphismes $F(X) \to F(Y)$ dans $\mathcal{D}$*

Définition 48 (Section, rétraction)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. On appelle*

- section *de f un morphisme $\mathbf{s} : Y \to X$ telle que $f \circ \mathbf{s} = \mathbf{1}_Y$;*
- rétraction *de f un morphisme $\mathbf{r} : Y \to X$ telle que $\mathbf{r} \circ f = \mathbf{1}_X$.*

En d'autres termes, une section est un inverse à droite et une rétraction un inverse à gauche.

2.6.2 n-catégories et catégories enrichies

Définition 49 (n-catégorie)**.** *On appelle n-catégorie une catégorie définie par induction sur n tel que :*

1. *une 0-catégorie est un ensemble ;*

2. *une $(n+1)$-catégorie est un catégorie enrichie sur la catégorie $n - \mathcal{Cat}$.*

Les deux premières n-catégories non triviales sont donc les 1-catégories et les 2-catégories. Les 1-catégories sont des catégories localement petites. Les 2-catégories sont des catégories à 2-morphismes.

Définition 50 (2-catégorie)**.** *On appelle* 2-catégorie $\mathcal{C}$ *la donnée :*

- *d'une classe d'objets (ou 0-morphismes)* $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ *;*

- *d'une classe de morphisme (ou 1-morphismes)* $\mathbf{Mor}(\mathcal{C})$ *pour tous objets* $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ *;*

- *d'une classe de 2-morphismes* $\mathbf{Mor}_2(\mathcal{C})$ *pour tous morphismes* $f, g \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C})$ *et tous objets* $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$.

Les 2-catégories sont équipées de deux compositions de morphismes :

- *une composition verticale associative, telle que pour tous objets* $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ *et tous morphismes* $f, g, h \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C})$*, les 2-morphismes* $\phi : f \Rightarrow g$ *et* $\psi : g \Rightarrow h$ *se composent :* $\psi \circ \phi : f \Rightarrow h$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left=60, "f"{name=F}] \arrow[rr, "g"'{name=G}] \arrow[rr, bend right=60, "h"'{name=H}] & & B
\arrow[Rightarrow, from=F, to=G, "\phi"] \arrow[Rightarrow, from=G, to=H, "\psi"]
\end{tikzcd}
$$

- *une composition horizontale associative, telle que pour tous objets* $A, B, C \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ *et tous morphismes* $f, f', g, g' \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C})$*, les 2-morphismes* $\phi : f \Rightarrow g$ *et* $\phi' f' \Rightarrow g'$ *se composent :* $\phi' \circ \phi : f'f \Rightarrow g'g$*, où* $f'f$ *et* $g'g$ *sont les composées de 1-morphismes* $f' \circ f : A \Rightarrow B$ *et* $g' \circ g : B \Rightarrow C$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left=60, "f"{name=F}] \arrow[rr, "g"'{name=G}] & & B \arrow[rr, bend left=60, "f'"{name=F2}] \arrow[rr, "g'"'{name=G2}] & & C
\arrow[Rightarrow, from=F, to=G, "\phi"] \arrow[Rightarrow, from=F2, to=G2, "\phi'"]
\end{tikzcd}
$$

On en déduit une loi d'échange : si $\phi : f \Rightarrow f'$, $\phi' : f' \Rightarrow f"$, $\psi : g \Rightarrow g'$, $\psi' : g' \Rightarrow g"$, alors $(\psi' \circ \psi)(\phi' \circ \phi) = \psi'\phi' \circ \psi\phi$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"'] \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\phi"] & B \arrow[r, "g'"'] \arrow[r, bend left=60, "f'"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\phi'"] & C \\
 & \circ & \\
A \arrow[r, "g"] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\psi"] & B \arrow[r, "g'"] \arrow[r, bend right=60, "h'"'] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\psi'"] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\phi"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\psi"] & B \arrow[r, "g'"] \arrow[r, bend left=60, "f'"] \arrow[r, bend right=60, "h'"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\phi'"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\psi'"] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\phi"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\psi"] & B
\end{tikzcd}
\circ
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g'"] \arrow[r, bend left=60, "f'"] \arrow[r, bend right=60, "h'"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\phi'"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\psi'"] & C
\end{tikzcd}
$$

Enfin, si id_A est le 1-morphisme identité de l'objet A et si Id_{id_A} est le 2-morphisme identité de l'objet id_A dans la catégorie des morphismes de A vers A dans $\mathcal{C}$, alors la composée horizontale de ce 2-morphisme par un 2-morphisme ϕ est égal à ϕ.

Définition 51 (n-catégorie faible)**.** *On appelle n-*catégorie *faible une n-catégorie étendue dans laquelle la composition des n-morphismes n'est pas strictement associative, mais seulement associative à isomorphisme près.*

En particulier, on appelle *bicatégorie* une 2-catégorie dont l'associativité et la composition avec les morphismes identité sont satisfaites seulement à isomorphisme près.

Définition 52 (Catégorie monoïdale)**.** *On appelle catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ une catégorie munie :*

1. *D'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ appelé produit tensoriel ;*

2. *D'un objet I appartenant à $\mathcal{C}$ appelé* objet unité *;*

3. *D'une transformation naturelle ϕ appelée* associateur *telle que pour tous objets A, B, C, $\phi_{A,B,C}$ est un isomorphisme de $(A \otimes B) \otimes C$ vers $A \otimes (B \otimes C)$. Autrement dit, ϕ est un isomorphisme naturel du foncteur $(- \otimes -) \otimes -$ vers le foncteur $- \otimes (- \otimes -)$;*

4. *De deux transformations naturelles λ et ρ induisant, pour tout objet A, des isomorphismes $\lambda_A : I \otimes A \longrightarrow A$ et $\rho_A : A \otimes I \longrightarrow A$.*

Les transformations naturelles sont pourvues de propriétés de commutativité exprimées par les diagrammes suivants.

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes 1_B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "1_A \otimes \lambda_B"] \\
 & A \otimes B &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B,C} \otimes 1_D"] \arrow[d, "\alpha_{A \otimes B,C,D}"'] & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B \otimes C,D}"] & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "1_A \otimes \alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C \otimes D}"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}$$

Définition 53 (Catégorie enrichie). *Une catégorie enrichie sur une catégorie monoïdale ou une bicatégorie est une généralisation du concept de catégorie où les morphismes sont des éléments de la catégorie monoïdale ou de la bicatégorie (plutôt qu'un ensemble dépourvu de structure).*

2.6.3 Produits, Sommes, exponentielles

Définition 54 (Objets initiaux, objets finals). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On appelle*

- objet initial *un objet I de $\mathcal{C}$ tel que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il y a une et un seul morphisme de I vers X ;*
- objet final *un objet F de $\mathcal{C}$ tel que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il y a une et un seul morphisme de X vers F ;*
- zéro *un objet qui est à la fois initial et final.*

Définition 55 (Produit, coproduit). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A et B deux objets de $\mathcal{C}$. On appelle*

- produit *de A et B, noté $A \times B$, un objet final dans la catégorie des cônes sur A et B ;*
- coproduit *de A et B, ou* somme *de A et B, noté $A \sqcup B$ ou $A + B$, un objet initial dans la catégorie des cocônes sur A et B ;*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "\phi"] \arrow[ddl, bend right, "a"'] \arrow[ddr, bend left, "b"] & \\
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"] \arrow[ddr, bend right, "a"'] & & B \arrow[dl, "i_B"'] \arrow[ddl, bend left, "b"] \\
 & A \sqcup B \arrow[d, "\phi"] & \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

Produit **Coproduit**

Définition 56 (Catégorie cartésienne, catégorie cocartésienne). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. $\mathcal{C}$ est appelée*

- *une* catégorie cartésienne *si, pour chaque paire d'objets, elle possède un objet final et un produit ;*
- *une* catégorie cocartésienne *si, pour chaque paire d'objets, elle possède un objet initial et un coproduit ;*
- *une* catégorie bicartésienne *si elle est à la fois cartésienne et cocartésienne.*

Définition 57 (Exponentielle)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ayant des produits et A et B deux objets de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{D}$ une catégorie dont les objets sont les diagrammes de la forme $X \times A \xrightarrow{f} B$ et dont les morphismes de l'objet $X \times A \xrightarrow{f} B$ vers l'objet $Y \times A \xrightarrow{g} B$ sont les morphismes $X \xrightarrow{\phi} Y$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \times A \arrow[rr, "\phi \times \mathbf{1}_A"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \times A \arrow[dl, "g"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

est commutatif. On appelle évaluateur*, noté $B^A \times A \xrightarrow{\mathbf{ev}} B$, un objet final dans $\mathcal{D}$. On appelle* exponentielle *l'objet B^A.*

Si un tel objet final existe, alors il existe pour tout morphisme $X \times A \xrightarrow{f} B$ un unique morphisme, noté $X \xrightarrow{\Lambda_A(f)} B^A$ et appelée abstraction (ou curryfiée) de f, telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times A \arrow[rr, "\Lambda_A(f) \times \mathbf{1}_A"] \arrow[dr, "f"'] & & B^A \times A \arrow[dl, "\mathbf{ev}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Définition 58 (Catégorie cartésienne fermée)**.** *On appelle* catégorie cartésienne fermée *(resp.* catégorie bicartésienne fermée*) une catégorie cartésienne (resp. bicartésienne) ayant des exponentielles pour tout couple d'objets.*

On pourra remarquer qu'une algèbre de Heyting, qui est un ensemble ordonné, n'est rien d'autre qu'une catégorie bicartésienne fermée.

Il est possible d'étendre les notions de produit et de somme à des diagrammes, et non plus seulement des objets, en raisonnant respectivement sur des cônes et des cocônes. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et le diagramme $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ dans $\mathcal{C}$. On se donne un cône sur ce diagramme, c'est-à-dire un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Définition 59 (Produit fibré)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ un diagramme dans $\mathcal{C}$. On appelle* produit fibré de f et g, *ou* produit fibré de A et B au dessus de C *un objet final (F, a, b) dans la catégorie des cônes sur $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

est alors appelé un carré cartésien, et le morphisme a (resp. b) est appelée un pullback de g (resp. f) le long de f (resp. g).

Autrement dit, le produit fibré est la limite du diagramme $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et le diagramme $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$ dans $\mathcal{C}$. On se donne un cocône sur ce diagramme, c'est-à-dire un diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

Définition 60 (Somme amalgamée)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$ un diagramme dans $\mathcal{C}$. On appelle* somme amalgamée de f et g, *ou* somme amalgamée de A et B le long de C *un objet initial (I, a, b) dans la catégorie des cocônes sur $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$. Le morphisme a (resp. b) est appelée un pushout de g (resp. f) le long de f (resp. g).*

Autrement dit, la somme amalgamée est la colimite du diagramme $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$.

Il existe une autre généralisation utile des notions de produit et de somme, relative aux ensembles ordonnés.

Définition 61 (Système inductif / projectif)**.** *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $(I, \leqslant)$ un ensemble ordonné filtrant.*

- *On appelle* système inductif *d'objets de $\mathcal{C}$ indexés par I la donnée d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ et de morphismes $f_i^j : E_i \to E_j$ pour chaque couple d'indices $(i, j) \in I^2$ tel que $i \leqslant j$, vérifiant*
  - $\forall i \in I, f_i^i = Id_{E_i}$;
  - $\forall (i, j, k) \in I^3,\ i \leqslant j \leqslant k \Rightarrow f_j^k \circ f_i^j = f_i^k$.
- *On appelle* système projectif *d'objets de $\mathcal{C}$ indexés par I la donnée d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ et de morphismes $f_i^j : E_j \to E_i$ pour chaque couple d'indices $(i, j) \in I^2$ tel que $i \leqslant j$, vérifiant*
  - $\forall i \in I, f_i^i = Id_{E_i}$;
  - $\forall (i, j, k) \in I^3,\ i \leqslant j \leqslant k \Rightarrow f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$.

Définition 62 (Limite inductive / projective)**.** *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et (X_i, f_{ij}) un système respectivement inductif (projectif) dans $\mathcal{C}$.*

- *On appelle* limite inductive *X, lorsqu'elle existe, un objet de la catégorie $\mathcal{C}$ muni de morphismes ϕ_i de X_i à valeurs dans X vérifiant les relations de compatibilité $\phi_i = \phi_j \circ f_{ij}$ pour tous $i \leqslant j$. De plus, la donnée (X, ϕ_i) doit être universelle : pour tout autre objet Y muni d'une famille de morphismes ψ_i vérifiant des compatibilités analogues, il existe un unique morphisme $u : X \to Y$*

telle que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

est commutatif pour tous $i \leqslant j$. La limite inductive est notée : $X = \varinjlim X_i$.

- *On appelle* limite projective *des X_i, lorsqu'elle existe, un objet de la catégorie $\mathcal{C}$ muni de morphismes π_i de X à valeurs dans X_i vérifiant les relations de compatibilité $\pi_i = f_{ij} \circ \pi_j$ pour tous $i \leqslant j$. De plus, la donnée (X, π_i) doit être universelle : pour tout autre objet Y muni d'une famille de morphismes ψ_i vérifiant des compatibilités analogues, il existe un unique morphisme $u : Y \to X$ telle que le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, "\psi_j"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\
& X \arrow[dl, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & \\
X_j \arrow[rr, "f_{ij}"'] & & X_i
\end{tikzcd}$$

est commutatif pour tous $i \leqslant j$. La limite projective est notée : $X = \varprojlim X_i$.

En d'autres termes, les limites inductives et projectives représentent les foncteurs qui à un objet Y de la catégorie $\mathcal{C}$ associe respectivement les ensembles $\varprojlim \mathrm{Hom}(X_i, Y)$ et $\varprojlim \mathrm{Hom}(Y, X_i)$. Elles sont étroitement liées à la notion de préfaisceau et au plongement de Yoneda.

2.6.4 Lemme de Yoneda

Définition 63 (Foncteur représentable)**.** *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et F un foncteur contravariant (resp. covariant) de $\mathcal{C}$ dans $\mathfrak{Ens}$. On dit que F est* représentable *si et seulement si il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que F soit isomorphe au foncteur $\boldsymbol{Hom}(., X) : Y \to Hom(Y, X)$ (resp. au foncteur $\boldsymbol{Hom}(., X) : Y \to \boldsymbol{Hom}(Y, X)$).*

Définition 64 (Préfaisceau, copréfaisceau)**.** *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. On appelle*

- préfaisceau *de $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$ un foncteur $F : \mathcal{C}^{op} \to D$;*
- copréfaisceau *de $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$ un foncteur $G : \mathcal{C} \to D$.*

Autrement dit, un préfaisceau (resp. un copréfaisceau) est un foncteur contravariant (resp. covariant) de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$. Le cas le plus usuel est celui où $\mathcal{C}$ est la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles, qui englobe en particulier toutes les catégories concrètes considérées en géométrie algébrique.

Définition 65 (Catégorie des préfaisceaux)**.** *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. On appelle* catégorie des préfaisceaux *la catégorie de foncteurs $\mathcal{PS}h_{\mathcal{D}}(\mathcal{C})$, notée également $[\mathcal{C}^{op}, \mathcal{D}]$, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les foncteurs $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ et dont les morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs. La catégorie des préfaisceaux peut également être vue comme la catégorie exponentielle $\mathcal{D}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ ou encore la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$*

Lorsque $\mathcal{D} = \mathcal{E}ns$, on note simplement $\mathcal{PS}h(\mathcal{C}) = [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{E}ns]$ la catégorie des préfaisceaux.

Définition 66 (Classifiant)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{E}ns$ un foncteur. On appelle* classifiant *pour le foncteur F un couple (A, ι) où A est un objet de $\mathcal{C}$ et ι un élément de $F(A)$ tel que l'application $\theta X : C(X, A) \to F(X)$, définie par $\theta X(f) = F(f)(\iota)$ est bijective.*

Proposition 5 (Lemme de Yoneda)**.** *Soient $F, G : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{E}ns$ deux foncteurs. Si F est représentée par le classifiant (A, ι), l'application $\phi \mapsto \phi(\iota)$ est une bijection de $\mathbf{Nat}(F, G)$ vers $G(A)$.*

Il est possible de donner une caractérisation alternative faisceautique du lemme de Yoneda.

Proposition 6 (Lemme de Yoneda (version préfaisceaux))**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $\mathcal{PS}h(\mathcal{C})$ la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$. Soit $A \in \mathcal{C}$ un objet. Pour chaque objet $X \in \mathcal{C}$, les transformations naturelles de $\mathbf{Hom}(-, X)$ vers F sont en bijection avec les éléments $F(X)$, formellement,*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{PS}h(\mathcal{C})}(\mathbf{Hom}(-, X), F) \cong F(X),$$

ou encore

$$\mathbf{Nat}(\mathbf{Hom}(-, A), F) \cong F(A).$$

La preuve du lemme s'obtient facilement en considérant les transformations naturelles $\eta : \mathbf{Hom}(A, -) \to F(-)$, en construisant le diagramme de naturalité suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Hom}(A, A) \arrow[r, "\mathbf{Hom}(A,f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & \mathbf{Hom}(A, X) \arrow[d, "\eta_X"] \\
F(A) \arrow[r, "F(f)"'] & F(X)
\end{tikzcd}$$

Dans le cas particulier où $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ est lui-même un hom-foncteur, les transformations naturelles η deviennent des correspondances bi-univoques entre hom-foncteurs, ce qui conduit à un plongement de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des préfaisceaux $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{E}ns]$. Pour tous morphismes $f : A \to X$ et $\alpha : A \to B$, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Hom}(A,A) \arrow[r, "\mathbf{Hom}(A,f)"] \arrow[d, "\mathbf{Hom}(\alpha,A)"'] & \mathbf{Hom}(A,X) \arrow[d, "\mathbf{Hom}(\alpha,X)"] \\
\mathbf{Hom}(B,A) \arrow[r, "\mathbf{Hom}(B,f)"'] & \mathbf{Hom}(B,X)
\end{tikzcd}$$

Corollaire 2 (Plongement de Yoneda)**.** *Le lemme de Yoneda implique, pour toute catégorie $\mathcal{C}$, un foncteur*

$$Y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathcal{E}ns],$$

plein et fidèle, appelé pour cette raison plongement de Yoneda*. En effet Y associe à tout objet $X \in \mathcal{C}$ le préfaisceau représentable associant à tout autre objet $A \in \mathcal{C}$ le **Hom**-ensemble des morphismes de A vers X :*

$$Y(X) : \mathcal{C}^{op} \overset{Hom(-,X)}{\longrightarrow} \mathcal{E}ns.$$

2.6.5 Dualité d'Isbell

Définition 67 (Plongement de co-Yoneda)**.** *Soit $Y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathcal{E}ns], A \mapsto \mathbf{Hom}(-, A)$ un plongement de Yoneda. On appelle* plongement de co-Yoneda *le plongement de Yoneda dual*

$$Z : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}, \mathcal{E}ns]^{op}, A \mapsto \mathbf{Hom}(A, -).$$

Le plongement de co-Yoneda définit donc un copréfaisceau de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}ns$, c'est-à-dire un foncteur covariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}ns$. La dualité faisceau-copréfaisceau entre les plongements de Yoneda et de co-Yoneda conduit alors naturellement à une construction fondamentale, explicitement introduite en 1986 par Lawvere [113], mais découverte 20 ans plus tôt par Isbell [95] [96].

Définition 68 (Dualité d'Isbell)**.** *Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie, $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles, $Y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathcal{E}ns]$ un plongement de Yoneda, et $Z : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}, \mathcal{E}ns]^{op}$ un plongement de co-Yoneda. Alors toute adjonction*

$$(\mathcal{O} \dashv Spec) : [\mathcal{C}, \mathcal{E}ns]^{op} \underset{Spec}{\overset{\mathcal{O}}{\leftrightarrows}} [\mathcal{C}^{op}, \mathcal{E}ns],$$

où

$$Spec(A) : U \mapsto [\mathcal{C}, \mathcal{E}ns]^{op}(Hom(U, -), A)$$

et

$$\mathcal{O}(X) : U \mapsto [\mathcal{C}^{op}, \mathcal{E}ns](X, Hom(-, U))$$

est appelée dualité d'Isbell.

À l'instar de Lawvere [110], Spec(A) et $\mathcal{O}(X)$ peuvent respectivement s'interpréter comme un espace généralisé et une quantité généralisée (*cf. supra* introduction).

Par suite, la dualité d'Isbell se généralise à toute catégorie $\mathcal{D}$, au besoin enrichie, ce qui définit une adjonction très générale entre la catégorie des copréfaisceaux $\mathcal{CoPSh} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et la catégorie des préfaisceaux $\mathcal{PSh} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to D$:

$$(\mathcal{O} \dashv Spec) : \mathcal{CoPSh} \underset{Spec}{\overset{\mathcal{O}}{\leftrightarrows}} \mathcal{PSh}.$$

Définition 69 (Auto-dual d'Isbell)**.** *Tout objet $A \in [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ (respectivement $X \in [\mathcal{C}^{op}, \mathcal{D}]$), tel que $A \to \mathcal{O}(Spec(A))$ (respectivement $X \to Spec(\mathcal{O}(X))$) est un isomorphisme, est appelé* auto-dual d'Isbell.

Proposition 7. *Tous les foncteurs représentables sont des auto-duaux d'Isbell.*

Démonstration. Par exemple [197]. □

La dualité d'Isbell est une matrice permettant de regrouper un grand nombre de dualités régionales, en se focalisant sur la structure faisceautique liant les objets, les morphismes et les foncteurs. Nous reportons ici la liste des dualités régionales exposées dans ce chapitre. Notons que d'innombrables autres dualités auraient également leur place dans ce tableau.

Espaces :	$\mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D}$	: Algèbres
Espaces de Stone :	$\mathcal{Stone} \leftrightarrows \mathcal{Boole}$	: Algèbres de Boole
Espaces topologiques :	$\mathcal{Top} \leftrightarrows \mathcal{Frm}$	: *Frames*
Espaces topologiques sobres :	$\mathcal{Sob} \leftrightarrows \mathcal{SFrm}$	: *Frames* spatiales
Espaces topologiques compacts :	$\mathcal{Top}_{etc} \leftrightarrows \mathcal{Stell}_{com}$	: Algèbres stellaires commutatives
Schémas :	$\mathcal{Sch} \leftrightarrows \mathcal{CRing}$	: Anneaux commutatifs
Schémas dérivés :	$\mathcal{DSt} \leftrightarrows \mathcal{DGA}_k$	: k-algèbres arbitraires

TABLE 2.1 – Les dualités régionales espaces / algèbres

Chapitre 3

Logique

Contents

Riassunto

Questo capitolo descrive la dualità di Isbell in logica. Si basa sulla geometria dell'interazione di Girard, e in particolare su una versione categorica di quest'ultima. La geometria dell'interazione di Girard è un ambizioso programma di ricostruzione della logica inteso a reinterpretare la dualità classica sintassi-semantica. La costruttività consiste nella inversione della direzione della costruzione delle regole logiche : invece di costruire le regole logiche che portano al giudizio logico, (ri)costruiamo le leggi che portano alle regole logiche. Questa ricostruzione è resa possibile dall'attento esame delle proprietà geometriche delle regole logiche. Questo approccio si concentra quindi sulle condizioni di possibilità della semantica, in modo da costruire le formule logiche (che porta a quella che Girard chiama « sintassi trascendentale »). Tuttavia, la geometria dell'interazione di Girard non identifica una situazione spazio-azione chiara (nel senso categorico considerato). Facciamo riferimento alla rilettura categorica proposta da Haghverdi per rivelare una situazione spazio-azione particolare e alla fine una dualità di Isbell.

Résumé

Ce chapitre aborde la dualité d'Isbell en logique. Elle prend appui sur la géométrie de l'interaction de Girard, et plus précisément sur une version catégorique de cette dernière. La géométrie de l'interaction de Girard est un ambitieux programme de reconstruction de la logique visant à réinterpréter la dualité classique syntaxe-sémantique. La constructivité ontologisante se traduit ici par le renversement du sens de la construction des règles logiques : plutôt que de construire les règles logiques qui mènent au jugement logique, on (re)construit les lois qui mènent aux règles logiques. Cette reconstruction est rendue possible par l'examen attentif des propriétés géométriques cachées des règles logiques. Cette approche s'intéresse donc aux conditions de possibilité de la sémantique, de façon à *construire* les formules logiques (ce qui mène à ce que Girard [70] a appelé plus tard « syntaxe transcendantale »). Cependant, la géométrie de l'interaction de Girard ne parvient pas à dégager de situation espace-action claire (au sens catégorique considéré). Nous nous appuyons sur la relecture catégorique proposée par Haghverdi [83] pour révéler une situation espace-action très particulière à la géométrie de l'interaction.

Abstract

This chapter deals with Isbell duality in logic. It is based on Girard's geometry of interaction (GoI), and more precisely on a categorical version of GoI. Girard's GoI is an ambitious program of reconstruction of logic aimed at reinterpreting the classical syntactic-semantic duality. The ontologizing constructivity is interpreted here by the reversal of the sense of the construction of logical rules : instead of constructing logical rules leading to logical judgment, we (re)construct laws leading to logical rules. This reconstruction is made possible by careful examination of the hidden geometric properties of logical rules. This approach is therefore concerned with the conditions of possibility of semantics, in order to build logical formulas (which leads to what Girard called « transcendental syntax »). However, Girard's GoI fails to reveal a clear space-action situation (in the categorical sense considered). We rely on the categorical interpretation proposed by Haghverdi [83] to reveal a space-action situation.

3.1 De la théorie de la démonstration à la géométrie de l'interaction

3.1.1 Syntaxe versus sémantique

Lorsque la logique faisait ses premiers pas, il n'y avait pas encore de conscience claire de séparation entre un niveau formel — syntaxique — et un niveau interprétationnel — sémantique. Présents seulement à l'état de « magma » dans la théorie d'Aristote, la syntaxe et la sémantique ne sont apparues séparables que lorsque la distance des points de vue s'est révélée suffisamment perceptible. D'une façon générale, un système logique peut être construit essentiellement de deux manières, soit à partir d'un ensemble de règles formelles devant remplir une certaine cohérence, soit à partir d'une structure interprétative devant présider la construction d'un langage formel. De fait, l'histoire de la logique fut le théâtre d'un va-et-vient entre des systèmes logiques poussés vers plus de syntaxe — le calcul logique de Leibniz [118], l'idéographie de Frege [57] — et ceux poussés vers plus de sémantique — l'algèbre de Boole [21], la théorie sémiotique de Bolzano [20]. À telle enseigne que la séparation syntaxe *vs* sémantique apparait aujourd'hui comme l'une des premières (sinon la première) clés de lecture de la logique.

Corrélativement à la prise de conscience de cette séparation s'élabore des théorèmes de passage de l'un à l'autre. On relie les systèmes syntaxiques et sémantiques par des théorèmes dits de *correction* — ce qui est prouvable est vrai — et de *complétude* — ce qui est vrai est prouvable. Ces théorèmes de passage sont redevables d'une conception particulière de la question sémantique, qui est rabattue sur la valeur de vérité du texte syntaxique (vériconditionnalisme). Les travaux menés à partir des années 1930 autour de la sémantique des preuves (Heyting [87], Kolmogorov [106]), et de la théorie de la calculabilité (Church [32], Turing [183]), puis les travaux développées à partir des années 1950 sur l'interface entre logique et calculabilité ont amené à raffiner ces théorèmes. La syntaxe et la sémantique apparaissent alors clairement comme une dualité dont les pôles sont liés par des théorèmes de correction et de complétude.

$$\begin{tikzcd} \textit{syntaxe} \arrow[r, bend left, "\textit{correction}"] & \textit{sémantique} \arrow[l, bend left, "\textit{complétude}"] \end{tikzcd}$$

FIGURE 3.1 – La dualité syntaxe / sémantique

Soit un système logique L permettant d'établir une preuve de la formule A. Dans le cadre vériconditionnel habituel, la preuve importe peu en elle-même, de sorte que l'on se contente d'écrire $\vdash A$ (A est valide). On définit alors une interprétation $[\![.]\!]$ fondée sur la notion de modèle. Soit M un modèle catégorique des formules et des preuves d'un langage $\mathcal{L}$, c'est-à-dire une catégorie dont les objets sont les interprétation $[\![A]\!]$, $[\![B]\!]$ des formules A, B dans le modèle, et les morphismes les jugements $[\![A \vdash B]\!]$. On dit que la formule A est un théorème si elle est vraie dans tout modèle du langage $\mathcal{L}$, ce qu'on note $\models [\![A]\!]$, où $[\![A]\!]$ désigne l'interprétation de A dans un modèle. Dans ce cadre, la correction d'un modèle est donnée par la relation suivante :

$$\vdash A \implies \models [\![A]\!],$$

tandis que la complétude est donnée par la réciproque

$$\models [\![A]\!] \implies \vdash A.$$

Le problème, c'est que ce premier niveau d'analyse n'interprète pas les preuves. C'est un inconvénient notoire si l'on vise à donner un sens aux preuves. Dans le cadre de la correspondance de Curry-Howard, une preuve logique peut être associée à un programme informatique ou une fonction récursive (par exemple un terme de lambda-calcul). On comprend alors qu'il est primordial de comprendre *comment fait* le programme, au delà de *ce qu'il fait*, car plusieurs programmes d'efficacité inégale peuvent réaliser une même fonction. Par exemple, le calcul du PGCD de deux nombres peut être programmé de façons différentes : l'algorithme d'Euclide conviendra à toutes les situations, mais la méthode soustractive sera plus rapide lorsque les nombres sont grands et relativement proches. L'intérêt est de réduire la taille du programme, de façon à limiter autant que possible leur temps d'exécution.

Il faut donc passer d'un jugement de la forme $\vdash A$ (A est valide) à un jugement de la forme $\vdash \pi : A$ (π est une preuve de A), parfois noté $\pi \vdash A$ [1]. Côté lambda-calcul, on dira que π est un terme de type A. Dans ce cadre, la théorie des modèles possède sa propre interprétation des preuves : ce sont les structures (des $\mathcal{L}$-structures) pour les preuves qui satisfont les structures pour les formules (en tant que morphismes entre les formules interprétées $[\![A]\!], [\![B]\!]$). Les preuves interprétées (« $[\![\pi]\!]$ ») représentent alors un modèle de ses structures ; elles *satisfont* ces structures.

On en vient alors à caractériser un théorème de correction modifié :

$$\pi \vdash A \implies \models [\![A]\!],$$

et un énoncé de complétude modifié :

$$\models [\![A]\!] \implies \exists \pi (\pi \vdash A),$$

appelé complétude forte. Cette complétude est effectivement forte, dans le sens où c'est la preuve qui est désormais visée et non plus seulement la prouvabilité. La relation est ainsi plus étroite entre la syntaxe et la sémantique.

Pour donner davantage de corps à l'interprétation des preuves, il est apparu judicieux de leur fournir un cadre d'analyse en termes d'invariance de la chose jugée : si certaines preuves sont équivalentes du point de vue opérationnel (elles prouvent la même formule), comment les ranger ? C'est le point de vue envisagé dans la sémantique dénotationnelle introduite par Strachey et Scott [163] dans les années 70. Dans l'esprit du *Über Sinn und Bedeutung* de Frege [54] et en accord avec la sémantique des langages de programmation, l'idée est d'interpréter les preuves (comme termes) comme des ensembles partiellement ordonnés, selon leurs transformations par élimination des coupures (normalisation). Quelle que soit la stratégie de normalisation retenue, la procédure d'élimination des coupures produit le même résultat, la même preuve normale (unicité du résultat, propriété de Church-Rosser), le contrôle du typage assurant l'existence de la preuve normale (propriété de normalisation faible).

1. On prendra soin de ne pas confondre cette notation avec un jugement de la forme $\Gamma \vdash \pi : A$, qui signifie que π est une preuve de A dans le contexte de jugement Γ (π est un terme de type A dans l'environnement Γ).

Il faut noter que cette approche relève d'un renversement de l'ordre en vigueur puisque, depuis les travaux de Löwenheim [121], Skolem [168] et surtout Tarski [181], l'étude formelle de la sémantique est rejetée dans des structures mathématiques ensemblistes en rapport avec le calcul des prédicats, la notion de métalangage et la théorie de la vérité de Tarski [2]. La sémantique dénotationnelle peut donc être considérée comme un retour à l'idée inaugurale de Frege, puisque ce sont les flèches (vues comme morphismes de preuve) qui déterminent les propriétés des objets (des preuves), à savoir celles de n'être que des cibles (des preuves normales). Cette approche a donc pour caractéristique d'interpréter les preuves dans un contexte d'invariance dénotationnelle, grâce à la notion centrale d'élimination des coupures. Cette mise en avant du rôle de la coupure est une idée originale qui s'est montrée fructueuse, non seulement pour ce qu'elle est, mais aussi pour ce qu'elle n'est pas. La sémantique dénotationnelle ne contient, en effet, aucune interprétation de l'élimination des coupures en elle-même. Elle se contente d'interpréter les preuves « le long » de l'élimination des coupures.

3.1.2 Approfondissement de la sémantique dénotationnelle

La section précédente a donné une brève présentation de la dualité entre syntaxe et sémantique, avec à la clé deux approches sémantiques différentes : la sémantique ensembliste et la sémantique dénotationnelle. Nous avons vu que la seconde est plus riche que la première, car elle apporte l'information complémentaire relative aux détours dans les preuves. Alors que nous avions affaire à une coupure-comme-inclusion dans la sémantique ensembliste (que l'on peut par exemple représenter par un diagramme de Venn), nous avons maintenant affaire à une coupure-comme-composition dans la sémantique dénotationnelle. Mais la question est maintenant de savoir si on peut aller plus loin, pour donner une interprétation différente à deux preuves différentes d'une même proposition, i.e. de même dénotation. Il parait en effet naturel d'attribuer une interprétation différente à deux preuves n'ayant pas le même sens (au sens du *Sinn* frégéen). Cet enjeu permet en un sens de parachever l'interprétation fonctorielle de la logique. Alors que la sémantique dénotationnelle se donne explicitement pour enjeu de construire un foncteur d'interprétation — il est déjà implicite dans l'interprétation BHK — nous nous donnons maintenant pour enjeu de compléter le carré commutatif interprétationnel suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi \arrow[r, "{[\![\cdot]\!]}"] \arrow[d, "\rightsquigarrow_\beta"'] & {[\![\pi]\!]} \arrow[d, "{[\![\rightsquigarrow_\beta]\!]}"'] \\
\pi' \arrow[r, "{[\![\cdot]\!]}"] & {[\![\pi']\!]}
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3.2 – Vers l'interprétation $[\![\rightsquigarrow_\beta]\!]$ de l'élimination des coupures

2. Voir Joinet [98] pour un exposé plus complet des doctrines logiques sur le thème frégéen du sens et de la dénotation.

On sait qu'il existe des méthodes « sémantiques » pour analyser l'élimination des coupures. Décrire l'élimination d'une coupure, c'est montrer la complétude de la preuve sans coupure en fonction d'une certaine sémantique (par exemple la sémantique dite des tableaux). Cette méthode fut menée avec succès à partir des années 50 par Beth [19] ou encore Rasiowa et Sikorski [149] pour démontrer la normalisation forte de différents calculs des séquents, y compris pour des logiques d'ordre supérieur.

Le problème, c'est que ces méthodes n'interprètent pas les coupures — pas plus que le *Hauptsatz* original de Gentzen — mais les systèmes logiques qui en font usage (qui sont cohérents). Le mécanisme même de l'élimination n'est pas interprété. Autrement dit, on a bien l'interprétation des objets-preuves avec et sans coupure dans le carré commutatif, mais il manque encore l'interprétation des morphismes, c'est-à-dire de la beta-réduction ($[\![\rightsquigarrow_\beta]\!]$). Or, on ne voit pas comment la théorie des modèles pourrait interpréter ces morphismes, à moins de rabattre le sens de la réduction sur une suite de tableaux sémantiques *ad hoc*. Cette méthode serait assez insatisfaisante, puisqu'elle consignerait le sens sur un empilement de structures ensemblistes dont la dernière strate serait la preuve normale [3].

On constate donc que cette nouvelle exigence fait sortir la logique de ses gons, et qu'il faut trouver un autre cadre pour interpréter l'éliminabilité des coupures. C'est le sens de la géométrie de l'interaction introduit par Girard. L'idée de Girard est d'interpréter les preuves comme des permutations sur un ensemble d'objets formant le support de la preuve. Mais pour arriver à une telle interprétation, il fallut raffiner la logique classique par la logique linéaire.

3.1.3 De la logique classique à la logique linéaire

La géométrie de l'interaction est un aboutissement — mais pas le dernier — d'un ensemble de travaux développés pour l'essentiel par Girard. Avant d'en présenter une version, il est nécessaire de faire quelques rappels sur ce qui a précédé sa construction.

Soit la proposition

$$\vdash A \wedge A \Rightarrow A \wedge A,$$

dont voici une preuve en calcul des séquents classique :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathrm{Ax}}{A, A \vdash A}\,\mathrm{Aff}}{A \wedge A \vdash A}\,\wedge\ \text{gauche} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathrm{Ax}}{A, A \vdash A}\,\mathrm{Aff}}{A \wedge A \vdash A}\,\wedge\ \text{gauche}}{A \wedge A \vdash A \wedge A}\,\wedge\ \text{droite}}{\vdash A \wedge A \Rightarrow A \wedge A}\,\Rightarrow$$

On remarque que ces séquents mêlent ce qui est du ressort de l'utilisation des contenus comme ressources dans les inférences et ce qui est du ressort des contenus eux-mêmes. Mais il est possible de séparer les deux questions en isolant clairement la gestion des occurrences de A. C'est la démarche de la logique linéaire, qui conduit à la reconsidération du groupe structurel (règles d'échange, d'affaiblissement et de contraction). La logique linéaire cherche à ramener dans le groupe logique certaines tâches auparavant déléguées au groupe structurel : la gestion des suites d'énoncés. C'est une façon parmi d'autres (avec la logique pertinente par exemple) d'internaliser

3. Voir Joinet [98] pour plus de développements à ce sujet.

la gestion des suites dans les règles logiques. Revue sous l'angle de la logique linéaire, notre proposition peut maintenant s'écrire

$$\vdash A \,\&\, A \multimap A \,\&\, A,$$

ce qui signifie que deux propositions A impliquent exactement (une fois) deux propositions A. On remarque au passage que nous faisons usage d'une conjonction additive, qui était implicite en logique classique et qui devient maintenant explicite. En logique linéaire, i.e. dans le calcul **LL**, une preuve de la proposition peut s'écrire de la façon suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, A^\perp}\,\text{Ax}}{\vdash A, A^\perp \oplus A^\perp}\,\oplus \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash A, A^\perp}\,\text{Ax}}{\vdash A, A^\perp \oplus A^\perp}\,\oplus}{\vdash A \,\&\, A, A^\perp \oplus A^\perp}\,\&}{\vdash A \,\&\, A \multimap A \,\&\, A}\,\multimap$$

et on vérifie qu'on remonte bien à l'axiome identité sans invoquer de règles non logiques. L'autre intérêt de la logique linéaire est de combiner en un seul système — le calcul **LL** — la constructivité de la logique intuitionniste (**LJ**) et la symétrie du calcul classique (**LK**). Nous reportons ci-dessous les règles du calcul **LL**.

Le calcul LL

$$\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,\text{coupure}$$

FIGURE 3.3 – Groupe identité

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \otimes B, \Delta, \Delta'}\,\otimes\ \text{droite} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Delta}\,\otimes\ \text{gauche}$$

$$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A \parr B, \Delta}\,\parr\ \text{droite} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \parr B \vdash \Delta, \Delta'}\,\parr\ \text{gauche}$$

FIGURE 3.4 – Groupe multiplicatif

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \,\&\, B, \Delta}\,\&\ \text{droite} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \,\&\, B \vdash \Delta}\,\&\ \text{gauche}_1$$

$$\dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \,\&\, B \vdash \Delta}\,\&\ \text{gauche}_2$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}\,\oplus\ \text{droite}_1 \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}\,\oplus\ \text{droite}_2$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta}\,\oplus\ \text{droite}$$

FIGURE 3.5 – Groupe additif

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}\,\text{dereliction} \qquad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}\,\text{contraction} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}\,\text{affaiblissement}$$

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\,\text{promotion}$$

FIGURE 3.6 – Groupe exponentiel

3.1.4 Du calcul des séquents aux réseaux de preuves

La logique linéaire ne se contente pas de clarifier les tâches anciennement rattachées au groupe structurel, elle clarifie par la même occasion le rapport entre la représentation syntaxique, i.e. le calcul des séquents linéaire, et la représentation géométrique à laquelle pourrait prétendre la déduction naturelle. Sans surprise, c'est cette dernière qui fait les frais de la remise à plat. Girard a montré qu'une déduction naturelle linéaire cumule les maladresses : certaines prémisses sont des conclusions cachées (par exemple dans l'élimination de l'implication linéaire), certaines hypothèses sont actives à distance (par exemple dans l'introduction de l'implication linéaire), et, pire, certaines propositions sont arbitrairement introduites pour régler l'élimination (par exemple celle du tenseur). Il faut à l'évidence remettre à plat la représentation géométrique, pour viser une représentation pleinement dynamique. C'est la raison d'être des *réseaux de preuves*. Par exemple, les réseaux de preuves de la formule $A \otimes A \multimap A \otimes A$ prennent la forme suivante :

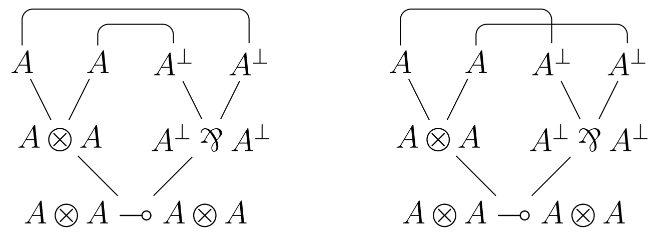


FIGURE 3.7 – Réseaux de preuves de $A \otimes A \multimap A \otimes A$

On constate qu'on obtient deux réseaux, ce qui fait écho aux deux arbres que l'on obtiendrait en déduction naturelle [4]. Ces réseaux de preuves ne diffèrent cependant que par le routage des axiomes, droit dans le cas gauche, croisé dans le cas droit. D'où l'idée de raisonner sur leur structure commune, c'est-à-dire sur les noeuds du réseau, ce qui mène à la notion de *structure de preuve*. Dans le fragment de la logique linéaire multiplicative [5], une structure de preuve est un graphe dont les noeuds sont

4.

$$\cfrac{\cfrac{[A \wedge A]}{\vdash A}\,\wedge\ \text{élim}_1 \qquad \cfrac{[A \wedge A]}{\vdash A}\,\wedge\ \text{élim}_1}{\cfrac{\vdash A \wedge A}{\vdash A \wedge A \Rightarrow A \wedge A}\,\Rightarrow \text{intro}}\,\wedge\ \text{intro} \qquad \cfrac{\cfrac{[A \wedge A]}{\vdash A}\,\wedge\ \text{élim}_2 \qquad \cfrac{[A \wedge A]}{\vdash A}\,\wedge\ \text{élim}_2}{\cfrac{\vdash A \wedge A}{\vdash A \wedge A \Rightarrow A \wedge A}\,\Rightarrow \text{intro}}\,\wedge\ \text{intro}$$

5. La logique linéaire multiplicative, qui correspond au calcul **MLL**, se compose de la négation linéaire notée $A^\perp$ d'une conjonction et une disjonction multiplicative notées respectivement $\otimes$ et $\parr$, et d'une flèche linéaire définie au moyen de la négation linéaire et de la disjonction multiplicative : $A \multimap B = A^\perp \parr B$.

les règles de l'ensemble $\{\otimes, \parr, Ax, Coupure\}$ et les arêtes les énoncés. La structure de preuve de notre exemple est donc la suivante :

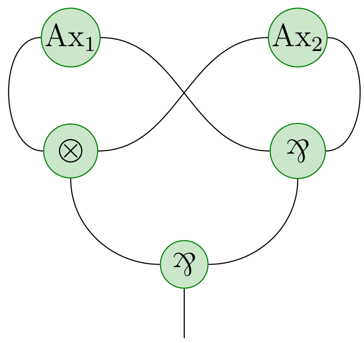


FIGURE 3.8 – Structure de preuve de $A \otimes A \multimap A \otimes A$

Cette représentation, qui met l'accent sur les connecteurs plutôt que sur les énoncés, laisse donc entrevoir une interprétation des preuves en termes de graphes d'interaction. Cependant, en l'état, cette représentation ne reflète que très partiellement la preuve réelle. Elle n'a pas grande signification tant qu'elle ne dit pas comment circule l'information dans les nœuds du graphe : il lui manque les « instructions de parcours » qui régissent la circulation dans le réseau. C'est la raison pour laquelle il faut compléter la notion de structure de preuve par un critère de correction. Le critère originel, établi par Girard [66], peut s'énoncer en termes de circuit *long-trip*.

Théorème *(critère du long-circuit)* *Soit Φ une structure de preuve, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) tout interrupteur $s \in \Phi$ induit un long-circuit

(ii) Φ correspond au calcul des séquents

La proposition (ii) est intuitive et exprime, en quelque sorte, un lien généalogique entre le calcul des séquents et les réseaux de preuve. La véritable nouveauté réside dans la proposition (i) avec les notions d'*interrupteur* et de *long-circuit*. On appelle interrupteur le choix gauche/droite d'un noeud $s \in \{\otimes, \parr\}$. Les figures 2.3 à 2.5 représentent les règles de parcours pour chacun des noeuds.

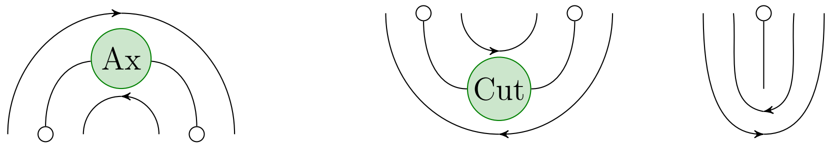


FIGURE 3.9 – Règles de parcours pour l'axiome, la coupure et la conclusion

La notion de long-circuit énonce alors qu'on parcourt deux fois le réseau, une fois dans un sens (en montant), une fois dans l'autre (en descendant). Sur cette base, le critère de correction correspond à l'*absence de court-circuit* : le réseau doit être parcouru en un seul « long-circuit » (ou « long-voyage »).

En tenant compte de ces instructions, la structure de preuve de $A \otimes A \multimap A \otimes A$ peut ainsi être réécrite de façon plus explicite :

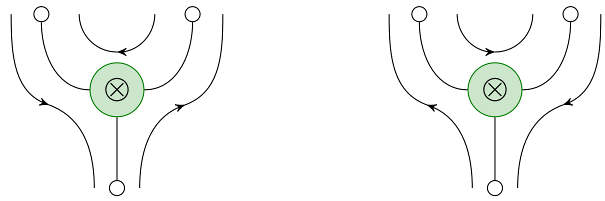


FIGURE 3.10 – $\otimes$-interrupteur gauche et $\otimes$-interrupteur droite

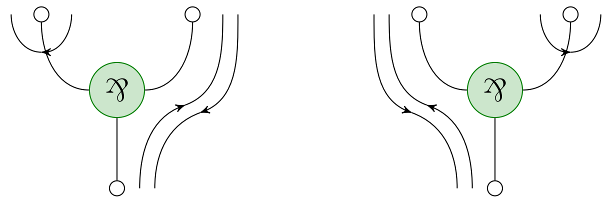


FIGURE 3.11 – $⅋$-interrupteur gauche et $⅋$-interrupteur droite

3.1.5 La géométrie de l'interaction

L'idée de départ de la géométrie de l'interaction (GdI), telle qu'elle a été formulée dans *Towards a geometry of interaction* [68], est d'interpréter les preuves comme des permutations sur un support, sur la base de la logique linéaire et des réseaux de preuves : le morphisme traduisant l'élimination des coupures est enfin interprété, et on passe d'une coupure-comme-composition à une coupure-comme-exécution. Dans sa première version, les preuves (i.e. les termes) sont interprétées comme des matrices carrées, et l'élimination des coupures comme une fonction d'exécution exploitant une notion d'orthogonalité.

Girard avait en effet remarqué une propriété d'orthogonalité entre la preuve non typée et son typage. Dans un réseau de preuve, il est possible de représenter une preuve non typée et un typage comme des permutations : la preuve non typée peut simplement être représentée comme une permutation sur les atomes, tandis que le typage peut être représenté comme une autre permutation sur les axiomes, en exploitant le critère de correction (les itinéraires définis par le critère des longs voyages). Dans ce cadre, Girard constate que le critère de correction, i.e. les typages corrects, correspondent exactement aux cas où les permutations respectivement associées à la preuve non typée (les axiomes) et à la preuve typée sont orthogonales.

Il ne reste plus alors qu'à définir l'exécution en termes de permutations, ce qui fait l'objet de la section suivante. Avant d'y venir, notons que si cette approche convient au fragment MELL, elle n'est pas adaptée au traitement des additifs. Pour prendre en charge l'ensemble du calcul LL, il est nécessaire de raisonner avec des injections partielles plutôt qu'avec des permutations, ce qui conduira Girard à reconsidérer la géométrie de l'interaction dans le facteur hyperfini. L'objet du chapitre étant plus méthodologique, nous nous limiterons à la première version de la GdI.

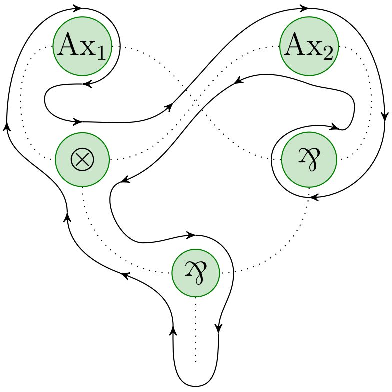


FIGURE 3.12 – Long-circuit dans la structure de preuve de $A \otimes A \multimap A \otimes A$

3.2 La géométrie de l'interaction dans les catégories

3.2.1 Premières interprétations catégoriques

À la suite de Girard, on a cherché à donner une interprétation catégorique de la GdI. La première formulation fut donnée par Abramsky et Jagadeesan [1] à l'aide de la théorie des domaines, avant que Joyal et alii [99] jettent une autre lumière en introduisant une notion de trace abstraite. Ces premiers travaux conduisent à un cadre catégorique suffisamment abstrait pour interpréter une « situation GdI » (*GoI situation*) générale adaptée au fragment MELL de la GdI. Dans ce cadre, une situation GdI est interprétée par une catégorie monoïdale symétrique tracée.

Définition 70. *Une catégorie monoïdale symétrique tracée est une catégorie monoïdale symétrique $(C, \otimes, I, s)$ avec une famille de fonctions $Tr^U_{X,Y} : C(X \otimes U, Y \otimes U) \to C(X, Y)$ appelée trace, sujette aux axiomes suivants :*

- *Naturelle en X, $Tr^U_{X,Y}(f)g = Tr^U_{X',Y}(f(g \otimes 1_U))$ où $f : X \otimes U \to Y \otimes U$, $g : X' \to X$. Soit en termes matriciels :*

$$f(g \otimes 1_U) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- *Naturelle en Y, $gTr^U_{X,Y}(f) = Tr^U_{X,Y'}((g \otimes 1_U)f)$ où $f : X \otimes U \to Y \otimes U$, $g : Y \to Y'$.*

$$(g \otimes 1_U)f = \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

- *Dinaturelle en U, $Tr^U_{X,Y}((1_Y \otimes g)f) = Tr^{U'}_{X,Y}(f(1_X \otimes g))$ où $f : X \otimes U \to Y \otimes U'$, $g : U' \to U$.*

$$(1_Y \otimes g)f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ gf_{21} & gf_{22} \end{bmatrix}, f(1_X \otimes g)f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12}g \\ f_{21} & f_{22}g \end{bmatrix}.$$

- *Disparition $Tr^I_{X,Y}(f) = f$ et $Tr^{U \otimes V}_{X,Y}(g) = Tr^U_{X,Y}(Tr^V_{X \otimes U, Y \otimes U}(g))$ pour $f : X \otimes I \to Y \otimes I$ et $g : X \otimes U \otimes V \to Y \otimes U \otimes V$.*

- *Superposition* $g \otimes Tr^U_{X,Y}(f) = Tr^U_{X\otimes W, Y \otimes Z}(f \otimes g)$ *pour* $f : X \otimes U \to Y \otimes U$ *et* $g : W \to Z$.

$$f \otimes g = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & f_{11} & f_{12} \\ 0 & f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

- *Torsion* $Tr^U_{U,U}(s_{U,U}) = 1_U$.

$$s_{U,U} = \begin{bmatrix} 0 & 1_U \\ 1_U & 0 \end{bmatrix}.$$

La notion de trace joue un rôle central dans l'interprétation de la coupure. C'est elle qui interprète, de façon intuitive et diagrammatique, la rétroaction[6]. Mais son aspect purement diagrammatique est aussi sa principale faiblesse. La notion de trace présente dans les catégories monoïdales symétriques tracées ne donne qu'une intuition imagée de celle qui est à l'oeuvre dans la GdI. Elle ne traduit pas les propriétés d'orthogonalité et de nilpotence, et ne décrit donc pas à proprement parler la dynamique de l'exécution.

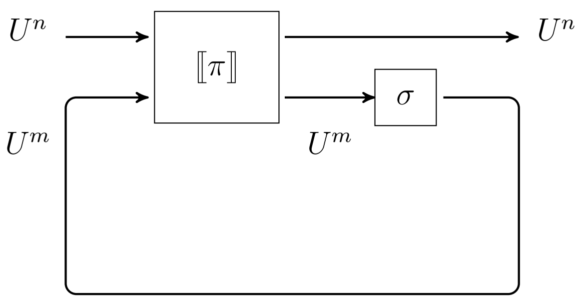


FIGURE 3.13 – Représentation diagrammatique de la rétroaction

3.2.2 Catégories à décomposition unique

Pour parvenir à une meilleure description catégorique de la GdI, il faut enrichir le cadre d'analyse de façon à interpréter réellement la formule de la trace, i.e. la fonction d'exécution. Pour y parvenir, il faut d'abord que les catégories puissent être sommables, ce qui conduit à la catégorie enrichie des Σ-monoïdes.

Définition 71. *Un Σ-monoïde est une paire (M, Σ) où M est un ensemble non vide et Σ une opération partielle sur des familles dénombrables $\{x_i\}_{i\in I}$ de M, satisfaisant les axiomes suivants :*

- *Associativité des partitions. Si $\{x_i\}_{i\in I}$ est une famille dénombrable et si $\{I_j\}_{j\in J}$ est une partition dénombrable de I, alors $\{x_i\}_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\{x_i\}_{i\in I_j}$ est sommable pour tout $j \in J$ et $\{\Sigma_{i\in I_j} x_i\}_{j\in J}$ est sommable. Dans ce cas, $\Sigma_{i\in I} x_i = \Sigma_{j\in J}\{\Sigma_{i\in I_j} x_i\}$.*

- *Somme unaire. Toute famille $\{x_i\}_{i\in I}$ dans laquelle I est un singleton est sommable et $\Sigma_{i\in I} x_i = x_j$ si $I = \{j\}$.*

6. Dans la GdI, la rétroaction est une notion d'exécution qui généralise la procédure d'élimination des coupures. Elle se manifeste formellement comme la composante « introspective »[7] de l'équation de rétroaction dont la solution interprète l'exécution de la coupure.

Intuitivement, les Σ-monoïdes permettent de traduire le comportement itératif de la trace telle qu'elle apparait dans la GdI 1, mais aussi dans bien d'autres branches des mathématiques [8]. Sur cette base, à partir du travail pionnier de Girard [67], Haghverdi [83] a introduit une notion de catégorie à décomposition unique traduisant exactement la formule de la trace de la GdI 1.

Définition 72. *Une catégorie à décomposition unique (CDU) est une catégorie Σ-monoïdale symétrique telle que, pour tout $j \in I$, il existe des morphismes $\iota_j : X_j \to \otimes_I X_i$, appelés quasi-injections, et $\rho_j : \otimes_I X_i \to X_j$, appelés quasi-projections, tels que*

- $\rho_k \iota_j = 1_{X_j}$ *si* $j = k$ *et* $0_{X_j X_k}$ *sinon.*
- $\Sigma_{i \in I} \iota_i \rho_i = 1_{\otimes_I X_i}$.

L'intuition matricielle d'une CDU est qu'il est toujours possible de décomposer l'interprétation $[\![\pi]\!] : \otimes_J X_j \to \otimes_J X_j$ d'une preuve π en une famille unique $[\pi_{ij}]_{i \in I, j \in J}$, et que chaque composante π_{ij} est sommable. Historiquement, les CDU furent introduites par Manes and Arbib [124] comme généralisations des catégories partiellement additives, pour fournir une sémantique algébrique aux langages de programmation. L'intérêt des catégories partiellement additives et des CDU est qu'elles formalisent, dans le langage des catégories, les processus itératifs propres aux points fixes. Mais là où les catégories partiellement additives se limitent au coproduit, les CDU sont valables pour les produits, ce qui permet de rendre compte de la GdI.

Le prix à payer, c'est que les CDU ne possèdent pas nécessairement de trace. Or, on attend précisément de la sémantique qu'elle fournisse une contrepartie catégorique de la notion de trace présente dans la GdI. Il nous faut donc démontrer un théorème de correction pour les CDU. Démontrer un tel théorème n'est ni plus ni moins que démontrer que l'interprétation catégorique est un foncteur fidèle. Par ailleurs, il faudra également démontrer la complétude forte de l'interprétation catégorique. Mais avant de démontrer que le foncteur interprétatif jouit des bonnes propriétés, il faut commencer par démontrer que nous avons bien défini un foncteur, c'est-à-dire que l'interprétation $[\![.]\!]$ fournit bien une catégorie.

3.2.3 L'interprétation $[\![.]\!]$ comme catégorie

Une catégorie est, rappelons-le, la donnée de quatre éléments : une classe d'objets, une classe de morphismes munie d'une fonction source et d'une fonction but, un morphisme identité et, pour tout couple de morphismes, un morphisme composée.

1. Les objets de l'interprétation sont les familles sommables interprétant les preuves. Il en existe une représentation matricielle plus commune et plus proche de l'intuition originelle de Girard. Un objet $[\![\pi]\!]$ interprétant une preuve π est, en effet, une matrice à valeurs dans $\mathcal{M}_n$ où $n = Card(U)$ représente le cardinal du support U de la preuve, c'est-à-dire le nombre d'atomes. Les objets de l'interprétation sont donc déjà des morphismes puisque les preuves peuvent être vues comme des programmes qui transforment les atomes logiques de preuve.

8. Par exemple en théorie des opérateurs, en théorie des noeuds, en lambda-calcul, ou encore en théorie des flux de données.

2. Les morphismes $\llbracket \rightsquigarrow_\beta \rrbracket$ sont les fonctions transformant une preuve $\llbracket \pi \rrbracket$ comportant une coupure en une preuve $\llbracket \pi' \rrbracket$ sans coupure, via la formule d'exécution déjà définie par Girard telle que :

$$EX(\llbracket \pi \rrbracket, \sigma) = Tr((1 \otimes \sigma)\llbracket \pi \rrbracket) = \pi_{11} + \sum_{n \geqslant 0} \pi_{12}(\sigma\pi_{22})^n(\sigma\pi_{21}),$$

où π est une preuve du séquent de la forme $\vdash [\Delta], \Gamma$ et où la matrice σ caractérise la rétroaction (i.e. la coupure). La propriété de normalisation forte correspond ainsi au cas où le second membre de la formule d'exécution est une somme finie.

3. Le morphisme identité correspond naturellement au cas particulier $\sigma = 0$ laissant $\llbracket \pi \rrbracket$ identique, c'est-à-dire au morphisme $Id_{\llbracket \pi \rrbracket} : \llbracket \pi \rrbracket \mapsto EX(\llbracket \pi \rrbracket, 0) = \llbracket \pi \rrbracket$. Nous vérifions en effet que $Tr((1 \otimes 0)\llbracket \pi \rrbracket) = \llbracket \pi \rrbracket + 0_n \pi_{12} = \llbracket \pi \rrbracket$.

4. Enfin le morphisme composée $EX(\llbracket \pi \rrbracket, \sigma) \circ EX(\llbracket \pi \rrbracket, \tau) = EX(EX(\llbracket \pi \rrbracket, \tau), \sigma)$, qui traduit l'associativité des coupures, est établi grâce aux propriétés de la trace définies précédemment :

$$\begin{aligned}
EX(EX(\llbracket \pi \rrbracket, \tau), \sigma) &= Tr^{U^{2m'}}((1 \otimes \sigma) Tr^{U^{2m''}}((1 \otimes \tau)(\llbracket \pi \rrbracket)), && (3.1)\\
&= Tr(Tr(1 \otimes \sigma \otimes 1)(1 \otimes \tau)\llbracket \pi \rrbracket)), () && (3.2)\\
&= Tr^{U^{2(m'+m'')}}((1 \otimes \sigma \otimes \tau)\llbracket \pi \rrbracket)), && (3.3)\\
&= EX(\llbracket \pi \rrbracket, \sigma \otimes \tau).
\end{aligned}$$

où 3.1 s'obtient par définition de EX(.), 3.2 par la propriété de naturalité de la trace et 3.3 par la propriété de disparition (ou monoïdalité en U) de la trace.

$$\begin{tikzcd}
\llbracket \pi \rrbracket \arrow[rr, "EX(\llbracket . \rrbracket{,}\sigma\otimes\tau)"] \arrow[dr, "EX(\llbracket . \rrbracket{,}\tau)"'] & & \llbracket \pi'' \rrbracket \\
& \llbracket \pi' \rrbracket \arrow[ur, "EX(\llbracket . \rrbracket{,}\sigma)"'] &
\end{tikzcd}$$

3.2.4 Correction et complétude

Étant entendu que $\llbracket . \rrbracket$ est bien une interprétation catégorique, il nous faut maintenant montrer la correction et la complétude de cette interprétation. En premier lieu, on vérifie ([67], [83]) par induction que toute preuve est bien interprétable par un objet de cette catégorie. Soit π une preuve.

1. Si π est un axiome $\vdash A, A^\perp$, alors $\llbracket \pi \rrbracket = s := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Si π est obtenu par une coupure entre deux preuves π' et π''de la forme [9]

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ \vdash [\Delta'], \Gamma', A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi'' \\ \vdots \\ \vdash [\Delta''], A^\perp \Gamma''\end{array}}{\vdash [\Delta', \Delta'', A, A^\perp], \Gamma', \Gamma''}\ (\text{coupure})$$

9. On représente entre crochets la composante introspective de la rétroaction, i.e. la coupure.

alors $[\![\pi]\!] = \tau^{-1}([\![\pi']\!] \otimes [\![\pi'']\!])\tau$, où τ est une matrice de permutation telle que $\tau : \Gamma' \otimes \Gamma'' \otimes \Delta' \otimes \Delta'' \otimes A \otimes A^\perp \to \Gamma' \otimes A \otimes \Delta' \otimes A^\perp \otimes \Gamma'' \otimes \Delta''$.

3. Si π est obtenu par une règle d'échange de deux formules A_i et A_{i+1} dans Γ', c'est-à-dire si π est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ \vdash [\Delta], \Gamma'\end{array}}{\vdash [\Delta], \Gamma}\ (\mathrm{Ex})$$

où A_i et A_{i+1} sont dans Γ', alors $[\![\pi]\!]$ est obtenu à partir de $[\![\pi']\!]$ en changeant l'ordre des rangs i et $i+1$, c'est-à-dire de la forme $[\![\pi]\!] = \tau^{-1}[\![\pi]\!]\tau$ si $\Gamma' = \Gamma'_1, A_i, A_{i+1}, \Gamma'_2$, $\Gamma = \Gamma'_1, A_{i+1}, A_i, \Gamma'_2$ et $\tau = 1_{\Gamma'_1} \otimes s \otimes 1_{\Gamma'_2 \otimes \Delta}$.

4. Si π est obtenu par l'application d'une règle $⅋$, c'est-à-dire si π est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ \vdash [\Delta], \Gamma', A, B\end{array}}{\vdash [\Delta], \Gamma', A ⅋ B}\ (⅋)$$

alors $[\![\pi]\!] = g[\![\pi']\!]f$ où $f = 1_{\Gamma'} \otimes k \otimes 1_\Delta$ et $g = 1_{\Gamma'} \otimes j \otimes 1_\Delta$.

5. Si π est obtenu par l'application d'une règle $\otimes$, c'est-à-dire si π est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ \vdash [\Delta'], \Gamma', A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi'' \\ \vdots \\ \vdash [\Delta''], \Gamma'', B\end{array}}{\vdash [\Delta', \Delta''], \Gamma', \Gamma'', A \otimes B}\ (\otimes)$$

alors $[\![\pi]\!] = g\tau^{-1}[\![\pi]\!] \otimes [\![\pi']\!]\tau f$ où $\tau : \Gamma' \otimes \Gamma'' \otimes A \otimes B \otimes \Delta' \otimes \Delta'' \to \Gamma' \otimes A \otimes \Delta' \otimes \Gamma'' \otimes B \otimes \Delta''$, $f = 1_{\Gamma' \otimes \Gamma''} \otimes k \otimes 1_{\Delta' \otimes \Delta''}$ et $g = 1_{\Gamma' \otimes \Gamma''} \otimes j \otimes 1_{\Delta' \otimes \Delta''}$.

6. Si π est obtenu à partir de π' et d'une règle ! dans Γ', c'est-à-dire si π est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ \vdash [\Delta], ?\Gamma', A\end{array}}{\vdash [\Delta], ?\Gamma', !A}\ (!)$$

alors $[\![\pi]\!] = ((ue_U)^{\otimes n} \otimes u \otimes u^{\otimes 2n})\phi^{-1}T((v^{\otimes n} \otimes 1_A \otimes 1_\Delta)[\![\pi']\!](u^{\otimes n} \otimes 1_A \otimes 1_\Delta))\phi((e'_U v)^{\otimes n} \otimes v \otimes v^{\otimes 2n})$.

7. Si π est obtenu à partir de π' en appliquant une règle de déréliction, c'est-à-dire si π est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ \vdash [\Delta], \Gamma', A\end{array}}{\vdash [\Delta], \Gamma', ?A}\ (\mathrm{D})$$

alors $[\![\pi]\!] = (1_{\Gamma'} \otimes ud_U \otimes 1_\Delta)[\![\pi']\!](1_{\Gamma'} \otimes d'_U v \otimes 1_\Delta)$.

8. Si π est obtenu à partir de π' en appliquant une règle d'affaiblissement, c'est-à-dire si π est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ \vdash [\Delta], \Gamma'\end{array}}{\vdash [\Delta], \Gamma', ?A}\,(\mathrm{W})$$

alors $[\![\pi]\!] = (1_{\Gamma'} \otimes uw_U \otimes 1_\Delta)[\![\pi']\!](1_{\Gamma'} \otimes w'_U v \otimes 1_\Delta)$.

9. Si π est obtenu à partir de π' en appliquant une règle de contraction, c'est-à-dire si π est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ \vdash [\Delta], \Gamma', ?A, ?A\end{array}}{\vdash [\Delta], \Gamma', ?A}\,(\mathrm{C})$$

alors $[\![\pi]\!] = (1_{\Gamma'} \otimes uc_U(v \otimes v) \otimes 1_\Delta)[\![\pi']\!](1_{\Gamma'} \otimes (u \otimes u)c'_U v \otimes 1_\Delta)$.

En second lieu, il faut démontrer que, pour toute élimination de coupure réduisant une preuve π en une preuve π', la fonction d'exécution préalablement définie s'exécute en temps fini. Le cas le plus simple est celui où π est déduite de preuves sans coupure. Soit π une preuve obtenue à partir de l'application d'une règle de coupure. Haghverdi [83] montre que $EX([\![\pi]\!], \sigma)$ est une somme finie. En effet, de ce qui précède sur l'interprétation de la règle de la coupure, nous savons que $[\![\pi]\!] = \tau^{-1}([\![\pi']\!] \otimes [\![\pi'']\!])\tau$ où $\tau : \Gamma' \otimes A \otimes A^\perp \otimes \Gamma'' \to A \otimes A^\perp \otimes \Gamma' \otimes \Gamma''$ est la matrice de permutation telle que

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous avons alors

$$EX([\![\pi]\!], \sigma) = \begin{bmatrix} \pi'_{11} & 0 \\ 0 & \pi''_{22} \end{bmatrix} + \sum_{n \geqslant 0} \begin{bmatrix} \pi'_{12} & 0 \\ 0 & \pi''_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \pi''_{11} \\ \pi'_{22} & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 & \pi''_{12} \\ \pi'_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

où $[\![\pi']\!] = \begin{bmatrix} \pi'_{11} & \pi'_{12} \\ \pi'_{21} & \pi'_{22} \end{bmatrix}$ et $[\![\pi'']\!] = \begin{bmatrix} \pi''_{11} & \pi''_{12} \\ \pi''_{21} & \pi''_{22} \end{bmatrix}$.

Haghverdi montre que le second membre est une somme finie, c'est-à-dire que l'algorithme d'exécution est bien nilpotent. En particulier, dans le cas où π'' est un simple axiome, c'est-à-dire dans le cas où $[\![\pi'']\!] = [\![Ax]\!] = s$, nous vérifions que nous obtenons $Ex([\![\pi]\!], \sigma) = [\![\pi']\!]$, ce qui correspond au cas-clé « axiome » suivant :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ \vdash \Gamma', A\end{array} \qquad \vdash A^\perp, A}{\vdash [A, A^\perp], \Gamma', A}\,(\text{coupure}) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ \vdash \Gamma', A\end{array}$$

Dans les autres cas, il faut montrer que toute exécution $EX([\![\pi]\!], \sigma)$ peut se ramener à une exécution de la forme $EX([\![\phi]\!], \tau)$, où ϕ et τ représentent respectivement la forme explicitée de ϕ (en déduisant A et $A^\perp$ de leur règle d'introduction respective) et la forme explicitée de la coupure. On raisonne alors par induction pour se ramener à un algorithme d'exécution unique, « en bloc ».

- Le premier cas est celui où $A := B \otimes C$ et $A^\perp := B^\perp \parr C^\perp$, ce qui correspond au cas-clé $\parr$-$\otimes$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1'\\ \vdots\\ \vdash \Gamma_1', B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2'\\ \vdots\\ \vdash \Gamma_2', C\end{matrix}}{\vdash \Gamma_1', \Gamma_2', B \otimes C}\,(\otimes) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1''\\ \vdots\\ \vdash B^\perp, C^\perp, \Gamma''\end{matrix}}{\vdash B^\perp \parr C^\perp, \Gamma''}\,(\parr)}{\vdash [B \otimes C, B^\perp \parr C^\perp], \Gamma_1', \Gamma_2', \Gamma''}\,\text{(coupure)} \qquad \rightsquigarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1'\\ \vdots\\ \vdash \Gamma_1', B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_1''\\ \vdots\\ \vdash B^\perp, C^\perp, \Gamma''\end{matrix}}{\vdash [B, B^\perp], \Gamma_1', C^\perp, \Gamma''}\,\text{(coupure)} \qquad \begin{matrix}\pi_2'\\ \vdots\\ \vdash \Gamma_2', C\end{matrix}}{\vdash [B, B^\perp, C, C^\perp], \Gamma_1', \Gamma_2', \Gamma''}\,\text{(coupure)}$$

  Dans ce cas, on peut définir une autre preuve ϕ de conclusion $\vdash [B, B^\perp, C, C^\perp], \Gamma_1', \Gamma_2', \Gamma''$, équivalente à π de conclusion $\vdash [B \otimes C, B^\perp \parr C^\perp], \Gamma_1', \Gamma_2', \Gamma''$, telle que $EX([\![\pi]\!], \sigma) = EX([\![\phi]\!], \tau)$, où $\tau = s \otimes s$ modélise simultanément la coupure sur B et la coupure sur C.

- Le cas où $A := !B$ et $A^\perp := ?B^\perp$ correspond au cas-clé $?_C$-$!$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1'\\ \vdots\\ \vdash ?\Gamma_1', B\end{matrix}}{\vdash ?\Gamma_1', !B}\,(!) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1''\\ \vdots\\ \vdash ?B^\perp, ?B^\perp, \Gamma''\end{matrix}}{\vdash ?B^\perp, \Gamma''}\,\text{(C)}}{\vdash [!B, ?B^\perp], ?\Gamma_1', \Gamma''}\,\text{(coupure)} \qquad \rightsquigarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1'\\ \vdots\\ \vdash \Gamma'', ?B, ?B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2'\\ \vdots\\ \vdash ?\Gamma_1', B^\perp\end{matrix}}{\vdash \Gamma'', ?\Gamma_1', ?B}\,\text{(coupure)} \qquad \begin{matrix}\pi_1''\\ \vdots\\ \vdash ?\Gamma_1', B^\perp\end{matrix}}{\vdash [!B, ?B^\perp], ?\Gamma_1', ?\Gamma_1'\Gamma''}\,\text{(coupure)}}{\vdash [!B, ?B^\perp], ?\Gamma_1', \Gamma''}\,\text{(C)}$$

  On peut dans ce cas définir une preuve ϕ de conclusion $\vdash [!B, ?B^\perp], ?\Gamma_1', \Gamma''$ telle que $EX([\![\pi]\!], \sigma) = EX([\![\phi]\!], \tau)$, où $\tau = s \otimes s$.

- Le cas traitant de la déréliction correspond au cas-clé $?_D$-$!$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi'_1\\ \vdots\\ \vdash B\end{array}}{\vdash !B}\,(!) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi''_1\\ \vdots\\ \vdash B^{\perp},\Gamma''\end{array}}{\vdash ?B^{\perp},\Gamma''}\,(\mathrm{D})}{\vdash [!B, ?B^{\perp}], \Gamma''}\,(\text{coupure}) \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi'_1\\ \vdots\\ \vdash B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi''_1\\ \vdots\\ \vdash B^{\perp},\Gamma''\end{array}}{\vdash [B, B^{\perp}], \Gamma''}\,(\text{coupure})$$

Dans ce cas, on peut définir une preuve ϕ de conclusion $\vdash [B, B^{\perp}], \Gamma''$ telle que $EX([\![\pi]\!], \sigma) = EX([\![\phi]\!], \tau)$, où $\tau = \sigma$.

- Le cas traitant de l'affaiblissement correspond au cas-clé $?_W$-$!$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi'_1\\ \vdots\\ \vdash B\end{array}}{\vdash !B}\,(!) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi''_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma''\end{array}}{\vdash ?B^{\perp},\Gamma''}\,(\mathrm{W})}{\vdash [!B, ?B^{\perp}], \Gamma''}\,(\text{coupure}) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}\pi''_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma''\end{array}$$

Dans ce cas, on peut définir une preuve de conclusion $\vdash \Gamma''$ telle que $EX([\![\pi]\!], \sigma) = EX([\![\pi''_1]\!])$.

- Le dernier cas correspond au cas-clé de la commutation ! :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi'_1\\ \vdots\\ \vdash B\end{array}}{\vdash !B}\,(!) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi''_1\\ \vdots\\ \vdash ?B^{\perp}, C\end{array}}{\vdash ?B^{\perp}, !C}\,(!)}{\vdash [!B, ?B^{\perp}], !C}\,(\text{coupure}) \quad \rightsquigarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi'_1\\ \vdots\\ \vdash B\end{array}}{\vdash !B}\,(!) \qquad \begin{array}{c}\pi''_1\\ \vdots\\ \vdash ?B^{\perp}, C\end{array}}{\vdash [!B, ?B^{\perp}], C}\,(\text{coupure})}{\vdash [!B, ?B^{\perp}], !C}\,(!)$$

On peut définir une preuve ϕ de même conclusion telle que $EX([\![\pi]\!], \sigma) = EX([\![\phi]\!], s)$.

Ce dernier cas achève de démontrer la surjectivité du foncteur $[\![.]\!]$ (qui est donc plein), c'est-à-dire la correction de l'interprétation catégorique. Il reste alors à établir la complétude forte pour les CDU, ce que parvient à faire Haghverdi [10].

Notons bien, pour conclure, que la complétude ne prévaut que dans l'interprétation catégorique présentée ici, c'est-à-dire le cadre d'analyse qui interprète les objets comme des preuves et les morphismes comme des β-réductions de preuves. Elle ne prévaut pas, rappelons-le, dans la sémantique (catégorique) dénotationnelle, qui interprète les objets comme des formules de MLL et les morphismes comme des preuves. Si π et π' sont deux preuves d'un même séquent telles que $\pi' \rightsquigarrow_\beta \pi$, alors en sémantique dénotationnelle $([\![\pi]\!] = [\![\pi']\!]) \not\Rightarrow (\pi = \pi')$. Le foncteur interprétationnel $[\![.]\!]$ n'est pas fidèle.

10. Il démontre très exactement le complétude forte pour le fragment MLL+mix, nous renvoyons à [83] pour la démonstration technique.

3.3 Une reconstruction de la notion de type

La géométrie de l'interaction n'a pas pour seul intérêt d'interpréter les preuves en termes d'algèbres d'opérateurs et d'interpréter dynamiquement la coupure ; elle a aussi pour vocation de reconstruire la logique à partir de ces nouvelles interprétations. Le recentrage de la logique sur les notions de coupure et d'orthogonalité (ici interprétées en termes de nilpotence forte), a pour effet de proposer un nouveau fondement pour une nouvelle définition constructive de la notion de type.

3.3.1 Une théorie des types *a posteriori*

Si on résume à ce stade la situation, on constate que nous sommes parti d'une interprétation des propositions (valeurs de vérité des propositions), pour ensuite leur ajouter celle des preuves (sémantique dénotationnelle), pour finalement aboutir à n'interpréter que les preuves (géométrie de l'interaction). Nous avons fini par « oublier » les types, i.e. les formules. Mais nous les avons oublié pour mieux les retrouver. En effet, le cadre mathématique suggéré par l'interprétation GdI permet de reconstruire les types, et c'est là sa grande force.

Conformément à la GdI1, la relation d'orthogonalité est liée à la nilpotence. Deux preuves π et π' sont polaires, notation $\pi \perp \pi'$, si leurs permutations associées sont duales, ou encore si leurs matrices de permutation associées sont orthogonales, ce que l'on note $[\![\pi]\!]\perp[\![\pi']\!]$.

Dans la formule d'exécution, c'est cette orthogonalité qui, via la nilpotence, garantit la normalisation forte de la réduction, i.e. l'élimination de la coupure. Mais la nilpotence peut aussi opérer sur l'ensemble de la preuve. Si tel est le cas, c'est-à-dire si l'exécution se réduit à sa pure composante « introspective » (la rétroaction, *cf. supra*), les preuves sont orthogonales, de sorte qu'il est possible de parler de preuve et de « contre-preuve »[11]. Il est alors possible de définir une notion de type à partir de l'orthogonalité des preuves et des contre-preuves. Soit $X \in \mathcal{M}_U$ un sous-ensemble de preuves de même support U, nous pouvons définir son orthogonal comme suit :

$$X^{\perp} = \{x \in \mathcal{M}_U | \forall y (y \in X \Rightarrow x \perp y)\}. \tag{3.4}$$

Sur cette base, on appelle *type* tout sous-ensemble $X \in \mathcal{M}_U$ tel que $X = X^{\perp\perp}$.

Il faut saisir la portée de cette définition, qui provoque un renversement de l'ordre déontique de la logique (Girard). Si on analyse les systèmes logiques existants, qu'ils soient rattachés la théorie des ensembles (calcul des prédicats et ses extensions) ou à la théorie des types (par exemple la théorie des types dépendants de Martin-Löf), on constate qu'elles possèdent toutes un point commun : elles norment de façon *a priori*. C'est une véritable condition d'existence qui concerne tous les systèmes logiques pouvant se ranger sous la correspondance preuves-programmes, qu'ils soient peu expressifs comme le calcul propositionnel ou très expressifs comme le calcul polymorphe (système F). Le cadre normatif est ici tout autre. Les types ne sont plus définis à partir d'autres types, mais à partir d'une règle logique plus fondamentale, la coupure. Ils sont *construits*.

11. Dans la GdI, on se propose de fonder la logique sur l'interaction entre les développements qui partent de la proposition qu'on veut prouver et ceux qui partent de sa contre-proposition (plutôt que de la fonder sur l'application d'une multitude de règles décomposant la proposition jusqu'aux axiomes). Il en résulte la notion de contre-preuve.

Nous remarquons cependant que la relation 3.4 ne définit pas catégoriquement la notion de type. Elle la définit seulement comme un ensemble (de preuves) en compréhension, ce que la théorie des ensembles (abstraite) appelle un « concept ». Cette relation est adaptée au point de vue ensembliste, mais inappropriée du point de vue pratique, dès lors qu'il s'agit de manipuler catégoriquement les types. Nous avons besoin pour cela de représenter la notion d'orthogonalité. Or, puisque la notion d'orthogonalité est un cas particulier d'interaction (c'est une interaction dont le résultat est purement introspectif), il nous faut établir des propriétés générales sur la façon dont les preuves — vues comme des endomorphismes — interagissent.

3.3.2 La catégorie $\mathcal{S}$, ou la socialité des preuves

Comme son nom l'indique, la géométrie de l'interaction est une entreprise de recentrage de la logique sur la notion d'interaction. Deux preuves interagissent s'il existe une élimination des coupure, c'est-à-dire une procédure de normalisation entre elles. L'existence de cette normalisation est traduite en GdI par l'équation de rétroaction, ce qui incite à introduire un morphisme caractérisant la notion de « socialité ».

Définition 73 (Socialité)**.** *Deux preuves π et π' sont dites* socialisées *si et seulement si l'interprétation de la coupure $\tau^{-1}(\llbracket\pi\rrbracket \otimes \llbracket\pi'\rrbracket)\tau$ vérifie une équation de rétroaction, i.e. telle que $\llbracket\pi_{CF}\rrbracket = EX(\tau^{-1}(\llbracket\pi\rrbracket \otimes \llbracket\pi'\rrbracket)\tau, \sigma)$ est nilpotent. Cette socialité est concrétisée par le morphisme*

$$\begin{aligned} S(.) \quad : \quad & \mathcal{M}_U \to \mathcal{M}_V, \\ & \llbracket\pi\rrbracket \mapsto \llbracket\pi'\rrbracket \text{ tel que } EX(\tau^{-1}(\llbracket\pi\rrbracket \otimes \llbracket\pi'\rrbracket)\tau, \sigma) = \llbracket\pi_{CF}\rrbracket, \text{ est nilpotent.} \end{aligned}$$

Le morphisme $S(.)$ complète le morphisme $EX(.)$ en ce sens qu'il donne une lecture horizontale de l'interaction des preuves, là où $EX(.)$ (qui exécute l'élimination de la coupure) en donne une lecture verticale. $S(.)$ indique en quelque sorte une possibilité de normalisation, là où $EX(.)$ effectue réellement cette normalisation (avec à la clé la détermination de la preuve sans coupure π_{CF}). Il représente la contrepartie du voisinage gauche-droite des prémisses de la règle de la coupure : chaque fois qu'une coupure est éliminable du côté logique, les prémisses communiquent via la fonction $S(.)$ du côté algébrique, et réciproquement. C'est un simple corollaire de la correction et de la complétude du foncteur $\llbracket . \rrbracket$.

Remarquons que l'endomorphisme résultat $\llbracket\pi_{CF}\rrbracket$ doit nécessairement refléter une coupure. En effet, si $\llbracket\pi_{CF}\rrbracket$ interprète également la règle mix [12], nous obtenons une (sur)catégorie triviale où tout endomorphisme socialise avec tous les autres, ce qui ne présente aucun intérêt. Le seul cas admissible est celui où $\llbracket\pi_{CF}\rrbracket = \llbracket\pi\rrbracket$ puisque, dans ce cas, $\llbracket\pi_{CF}\rrbracket$ interprète l'axiome. Il convient à ce propos de distinguer, parmi les morphismes $S(.)$, deux cas particuliers suivants les valeurs de $\llbracket\pi_{CF}\rrbracket$ et σ :

12. La règle mix est la suivante

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{mix}$$

FIGURE 3.14 – Groupe identité

- Les morphismes identités $[\![\pi]\!] \mapsto [\![\pi]\!]$ tels que $EX(\tau^{-1}([\![\pi]\!] \otimes [\![\pi]\!])\tau, 0) = [\![\pi]\!]$.
- Les morphismes de dualité $[\![\pi]\!] \mapsto [\![\pi^\perp]\!]$ tels que $EX(\tau^{-1}([\![\pi]\!] \otimes [\![\pi^\perp]\!])\tau, \sigma) = 0$.

Les morphismes de dualité sont intéressants car ils permettent de caractériser une notion de type, via la bidualité. Mais, avant d'y venir, il faut donner sa pleine mesure à la notion plus générale de socialité. Il est en effet possible de définir une nouvelle catégorie dont les objets sont toujours les endomorphismes $[\![\pi]\!]$ mais dont les morphismes sont maintenant nos relations $S(.)$. Nous avons déjà défini les morphismes identités, il nous reste donc à voir les morphismes composés pour identifier clairement une catégorie.

Théorème 8 (Composition de la socialité)**.** *Soient trois endomorphismes $[\![\pi]\!]$, $[\![\pi']\!]$, $[\![\pi'']\!]$ de même support. Si $[\![\pi]\!] = S([\![\pi']\!])$ et $[\![\pi']\!] = S([\![\pi'']\!])$, alors $[\![\pi]\!] = S([\![\pi'']\!])$.*

Preuve (esquisse). Supposons, sans perte de généralité, que π, π' et π'' démontrent les séquents respectifs $\vdash \Gamma, A, C$, $\vdash \Gamma', A^\perp, B$ et $\vdash \Gamma'', B^\perp, C^\perp$. Par hypothèse et par application du théorème de correction pour la règle de la coupure, nous savons que $[\![\pi]\!]$ et $[\![\pi']\!]$ sont de types respectifs $\theta(\Gamma, A, C)$, $\theta(\Gamma', A^\perp, B)$ et $\theta(\Gamma'', B^\perp, C^\perp)$. Par application du même théorème, nous savons qu'il est possible de former deux endomorphismes $[\![\hat{\pi}]\!]$ et $[\![\hat{\pi}']\!]$ de types respectifs $\theta(\Gamma, \Gamma'', C, B)$, $\theta(\Gamma', \Gamma'', A^\perp, C^\perp)$, à partir de l'application de la règle de la coupure sur $[\![\pi]\!]$ et $[\![\pi']\!]$, $[\![\pi']\!]$ et $[\![\pi'']\!]$ respectivement, tels que $EX([\![\hat{\pi}]\!], \sigma)$ et $EX([\![\hat{\pi}']\!], \sigma)$ sont nilpotents. Nous pouvons alors former un nouvel endomorphisme $[\![\tilde{\pi}]\!]$ de type $\theta(\Gamma, \Gamma', \Gamma', \Gamma'', B, A^\perp)$ à partir de l'application d'une coupure sur $[\![\hat{\pi}]\!]$ et $[\![\hat{\pi}']\!]$, tel que $EX([\![\tilde{\pi}]\!], \sigma)$ est nilpotent. Arrivés à ce point, il est possible d'appliquer une nouvelle règle de coupure pour aboutir à un endomorphisme de type $\theta(\Gamma, \Gamma', \Gamma', \Gamma'', \Delta)$, grâce à un endomorphisme de type $\theta(\Delta, A, B^\perp)$. Par induction, ce dernier permet de former une coupure dont il est le résultat, à partir d'endomorphismes de type $\theta(\Delta', A, D)$ et $\theta(\Delta'', B^\perp, D^\perp)$. Il suffit alors de choisir $\Delta' = \Gamma$, $\Delta'' = \Gamma''$ et $D = C$ pour identifier ces endomorphismes respectivement à $[\![\pi]\!]$ et $[\![\pi'']\!]$. $\square$

On peut remarquer que la propriété reste valable si on ajoute des coupures dans les preuves π, π' et π''. La démonstration est la même, aux coupures explicites près.

Ce théorème est la contrepartie algébrique du fait qu'il est toujours possible de construire une preuve à partir de deux coupures composées, comme l'illustre la démonstration ci-dessous. Dans les cas les plus délicats (si C est identifié à A ou B), il est toujours possible de remplacer la règle de la coupure par la règle mix si nécessaire, puisque les résultats sont valables pour le fragment MLL+mix (voir [84]).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, A, C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi'\\ \vdots\\ \vdash \Gamma', A^\perp, B\end{matrix}}{\vdash [A, A^\perp], \Gamma, \Gamma', C, B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi'\\ \vdots\\ \vdash \Gamma', A^\perp, B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi''\\ \vdots\\ \vdash \Gamma'', B^\perp, C^\perp\end{matrix}}{\vdash [B, B^\perp], \Gamma', \Gamma'', A^\perp, C^\perp}}{\vdash [A, A^\perp, B, B^\perp, C, C^\perp], \Gamma, \Gamma', \Gamma', \Gamma'', B, A^\perp} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, A, C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi''\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdash \Gamma'', B^\perp, C^\perp\end{matrix}}{\vdash [C, C^\perp], \Gamma, \Gamma'', A, B^\perp}}{\vdash [A, A^\perp, A, A^\perp, B, B^\perp, B, B^\perp, C, C^\perp, C, C^\perp], \Gamma, \Gamma, \Gamma', \Gamma', \Gamma'', \Gamma''}$$

La compositionalité du morphisme S parachève finalement l'identification d'une catégorie dont les objets sont les endomorphismes interprétant les preuves et les morphismes leur « échange d'information » dynamique et fini, via une rétroaction. Nous désignerons cette catégorie $\mathcal{S}$. Cette catégorie est localement petite, car pour tout π, π', les collections de morphismes $Hom(\llbracket\pi\rrbracket, \llbracket\pi'\rrbracket)$ sont des ensembles.

Rappelons que deux preuves $\llbracket\pi\rrbracket$ et $\llbracket\pi'\rrbracket$ peuvent interagir de différentes façons. Une fois fixés π et π', il reste à déterminer la dynamique de la normalisation, et plusieurs choix de branchements (τ) et de coupures (σ) sont possibles. Reprenons l'exemple de l'application d'une règle de coupure entre la preuve π de conclusion $\vdash \Gamma, A$ et l'axiome $\vdash A, A^{\perp}$. L'interprétation de la preuve résultante peut être $\llbracket\pi_1\rrbracket = \tau_1^{-1}(\llbracket\pi\rrbracket \otimes \llbracket Ax\rrbracket)\tau_1$ ou $\llbracket\pi_2\rrbracket = \tau_2^{-1}(\llbracket\pi\rrbracket \otimes \llbracket Ax\rrbracket)\tau_2$ selon les matrices respectives :

$$\llbracket\pi_1\rrbracket = \begin{bmatrix} \pi_{11} & 0 & \pi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \pi_{21} & 0 & \pi_{22} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \llbracket\pi_2\rrbracket = \begin{bmatrix} \pi_{11} & 0 & 0 & \pi_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \pi_{21} & 0 & 0 & \pi_{22} \end{bmatrix},$$

de branchements respectifs :

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et de preuves respectives :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi \\ \vdots \\ \vdash \Gamma, A\end{array} \qquad \vdash A^{\perp}, A}{\vdash [A, A^{\perp}], \Gamma, A} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi \\ \vdots \\ \vdash \Gamma, A\end{array} \qquad \vdash A^{\perp}, A}{\vdash [A^{\perp}, A], \Gamma, A}$$

Dans les deux cas, le processus d'exécution est bien nilpotent et $EX(\llbracket\pi_1\rrbracket, \sigma) = EX(\llbracket\pi_2\rrbracket, \sigma) = \llbracket\pi\rrbracket$. Les morphismes $S(\llbracket\pi_1\rrbracket)$ et $S(\llbracket\pi_2\rrbracket)$ appartiennent ainsi à l'ensemble $Hom(\llbracket\pi\rrbracket, \llbracket Ax\rrbracket)$ de la catégorie $\mathcal{S}$.

3.3.3 Dualisation et types

Nous portons maintenant notre attention sur les morphismes particuliers tels que $\llbracket\pi_{CF}\rrbracket = 0$. Dans ce cas, nous obtenons un morphisme fournissant une contre-preuve, de sorte que la socialisation devient une dualisation. Cette restriction ne caractérise pas une sous-catégorie puisque la compositionalité est naturellement perdue. En revanche, elle permet de dégager des propriétés intéressantes en vue de la définition de la notion de type.

Commençons par rappeler qu'une preuve possède plusieurs contre-preuves. Puisque $EX(\tau^{-1}(\llbracket\pi\rrbracket\otimes\llbracket\pi'\rrbracket)\tau, \sigma) = \llbracket\pi_{CF}\rrbracket$, il est possible, π étant donné, de choisir plusieurs endomorphismes $\llbracket\pi'\rrbracket$ suivant les branchements (τ) et le nombre de coupures (τ) choisis. Cette multiplicité est la contrepartie de l'existence de formules logiquement équivalentes, aux échanges et coupures près. Comme l'illustre la figure 3.15, on constate que les deux preuves π_1 et π_2 vérifient, après exécution, $EX(\llbracket\pi_1\rrbracket, \sigma) = EX(\llbracket\pi_2\rrbracket, \sigma) = 0$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi \\ \vdots \\ \vdash A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi' \\ \vdots \\ \vdash B\end{matrix}}{\vdash A \otimes B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi'' \\ \vdots \\ \vdash A^\perp, B^\perp\end{matrix}}{\vdash A^\perp \parr B^\perp}}{\vdash [A \otimes B, A^\perp \parr B^\perp]} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi \\ \vdots \\ \vdash A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi' \\ \vdots \\ \vdash B\end{matrix}}{\vdash A \otimes B} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi'' \\ \vdots \\ \vdash A^\perp, B^\perp\end{matrix}}{\vdash B^\perp, A^\perp}}{\vdash B^\perp \parr A^\perp}}{\vdash [A \otimes B, B^\perp \parr A^\perp]}$$

Figure 3.15 – Exemples de coupure dans les preuves π_1 et π_2

Par ailleurs nous savons que deux preuves interagissent de différentes façons. Une fois fixés $[\![\pi]\!]$ et $[\![\pi']\!]$, il est encore possible de choisir plusieurs morphismes $[\![\pi]\!] \to [\![\pi']\!]$ en fonction des branchements et des coupures. Cette multiplicité est la contrepartie de l'existence de preuves logiquement équivalentes, aux échanges et coupures près, comme l'illustre la figure 3.16.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi \\ \vdots \\ \vdash A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi' \\ \vdots \\ \vdash B\end{matrix}}{\vdash A \otimes B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi'' \\ \vdots \\ \vdash A^\perp, B^\perp\end{matrix}}{\vdash A^\perp \parr B^\perp}}{\vdash [A \otimes B, A^\perp \parr B^\perp]} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi \\ \vdots \\ \vdash A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi' \\ \vdots \\ \vdash B\end{matrix}}{\vdash A \otimes B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi'' \\ \vdots \\ \vdash A^\perp, B^\perp\end{matrix}}{\vdash A^\perp \parr B^\perp}}{\vdash [A^\perp \parr B^\perp, A \otimes B]}$$

Figure 3.16 – Exemples de branchement pour une coupure donnée

Ces exemples nous rappellent l'importance des aspects locatifs de la normalisation dans la géométrie de l'interaction. Il est essentiel de vérifier la correction du routage des atomes, à travers l'adéquation des endomorphismes en interaction. Dans la dynamique de l'interaction, chaque atome à une place bien déterminée, et ne peut en changer qu'au prix de la reconsidération du réseau des atomes dans son ensemble. C'est en cela que l'élimination des coupures devient un processus géométrique dans la géométrie de l'interaction, que ce soit dans sa version algébrique (Girard) ou catégorique (Haghverdi).

On comprend alors qu'une notion de négation peut être dégagée en termes de faisceaux. Soit $[\![\pi]\!] \in \mathcal{M}_U$ l'endomorphisme interprétant la preuve π de MLL. Tout endomorphisme x socialement compatible avec $[\![\pi]\!]$ induit un préfaisceau $F_x : \mathcal{S}^{op} \to \mathcal{E}$ associant à $[\![\pi]\!]$ l'ensemble $Hom([\![\pi]\!], x)$ et au morphisme $s : [\![\pi]\!] \mapsto [\![\pi']\!]$ l'ensemble $Hom(s, x)$ des morphismes tel que

$$Hom(s, x) = \{Hom([\![\pi]\!], x) \ni f \mapsto s^{op} \circ f \in Hom([\![\pi']\!], x)\}.$$

Le préfaisceau F_x considère ainsi, en tant que foncteur contravariant, l'ensemble des chemins d'exécution possibles (i.e. nilpotents) entre les endomorphismes $[\![\pi]\!]$ et x (les objets de F_x), ainsi que l'ensemble des relations entre les chemins d'exécution de deux endomorphismes $[\![\pi]\!]$ et $[\![\pi']\!]$ par rapport à x (les morphismes de F_x).

$$\begin{tikzcd}
\llbracket\pi\rrbracket \arrow[r, "s"] \arrow[d, "F_x"'] & \llbracket\pi'\rrbracket \arrow[d, "F_x"] \\
Hom(\llbracket\pi\rrbracket, x) \arrow[r, "Hom(s,x)"] & Hom(\llbracket\pi'\rrbracket, x)
\end{tikzcd}$$

Figure 3.17 – Préfaisceau sur $\mathcal{S}$

De la même façon, tout endomorphisme x induit un préfaisceau sur la catégorie opposée $(\mathcal{S}^{op})^{op} = \mathcal{S}$, c'est-à-dire un copréfaisceau $F^x : \mathcal{S} \to \mathcal{E}$ associant à $\llbracket\pi\rrbracket$ l'ensemble $Hom(x, \llbracket\pi\rrbracket)$ et au morphisme $s : \llbracket\pi\rrbracket \mapsto \llbracket\pi'\rrbracket$ l'ensemble $Hom(x, s)$ des morphismes tel que

$$Hom(x, s) = \{Hom(x, \llbracket\pi\rrbracket) \ni f \mapsto s \circ f \in Hom(x, \llbracket\pi'\rrbracket)\}.$$

$$\begin{tikzcd}
\llbracket\pi\rrbracket \arrow[r, "s"] \arrow[d, "F^x"'] & \llbracket\pi'\rrbracket \arrow[d, "F^x"] \\
Hom(x, \llbracket\pi\rrbracket) \arrow[r, "Hom(x,s)"] & Hom(x, \llbracket\pi'\rrbracket)
\end{tikzcd}$$

Figure 3.18 – Copréfaisceau sur $\mathcal{S}$

On comprend que les sens du préfaisceau et du copréfaisceau ne puissent pas être saisis syntaxiquement, puisque, en calcul des séquents, il est logiquement équivalent de placer π et la preuve représentée par x à gauche ou à droite dans la règle de la coupure. Ce n'est qu'en seconde analyse, avec la géométrie de l'interaction, que le positionnement gauche-droite des prémisses prend toute son importance : du point de vue de la dynamique, la coupure n'est plus commutative, ce que capture les catégories de préfaisceau et de copréfaisceau respectivement notées $[\mathcal{S}^{op}, \mathcal{E}]$ et $[\mathcal{S}, \mathcal{E}]$. Or, nous savons, d'après le chapitre 2, que ces catégories forment une adjonction appelée dualité d'Isbell, entre le spectre et le cospectre :

$$(coSpec \dashv Spec) : [\mathcal{S}, \mathcal{E}]^{op} \underset{Spec}{\overset{coSpec}{\leftrightarrows}} [\mathcal{S}^{op}, \mathcal{E}].$$

Nous savons en outre que les objets sont préservés par les monades de cette adjonction, c'est-à-dire qu'ils sont des auto-duaux d'Isbell. C'est une conséquence du fait que les foncteurs en présence sont représentables, ce qui est nécessairement le cas puisque tous les foncteurs hom sont représentables. Nous avons donc $coSpec \circ Spec = id$ et $Spec \circ coSpec = id$.

Mais on peut aussi se demander s'il existe des situations plus radicales où, en outre, $Spec = id$ et $coSpec = id$, c'est-à-dire des situations où le préfaisceau et le copréfaisceaux sont confondus ? Nous pouvons dégager une propriété intéressante à ce propos.

Proposition 8. *Soient π une preuve, σ une coupure, et π_{CF} une preuve sans coupure. $\llbracket\pi_{CF}\rrbracket = 0$ ssi $Hom(x, \llbracket\pi\rrbracket) = Hom(\llbracket\pi\rrbracket, x)$.*

Démonstration. C'est immédiat. Si $[\![\pi_{CF}]\!] \neq 0$, le routage τ est nécessairement différent pour obtenir $[\![\pi_{CF}]\!]$ si les prémisses sont renversées : leurs entrées doivent permuter dans la matrice de permutation. Si $[\![\pi_{CF}]\!] = 0$, il n'y a que la coupure explicite dans la conclusion, qui est indépendante du positionnement des prémisses, le routage est donc libre de sorte que $Hom(x, [\![\pi]\!]) = Hom([\![\pi]\!], x)$. □

Ainsi, le préfaisceau et le copréfaisceau sont confondus si la conclusion est vide. Toute conclusion non vide implique un routage contraint, qui est nécessairement différent si la preuve π est à gauche ou à droite. La situation est la même si la conclusion est composée de plusieurs occurrences d'un même atome. Dans ce cas, le routage est toujours contraint par l'aspect locatif de la logique linéaire : deux occurrences d'un même atome représentent deux atomes différents.

Il est alors possible d'introduire une notion de type sur la base de la notion de dual.

Définition 74 (Dual)**.** *Soit $A \subset \mathcal{M}_U$. On appelle* dual *de A l'ensemble $A^\perp := \{x \in \mathcal{M}_U | \forall y (y \in A \Rightarrow Hom(x, y) = Hom(y, x))\}$.*

Définition 75 (Type)**.** *Un* type *est un sous-ensemble $A \subset \mathcal{M}_U$ tel que $A = A^{\perp\perp}$.*

L'intérêt de ces définitions est qu'elles ne reposent pas explicitement sur la notion d'orthogonalité. Puisque les morphismes de dualité (i.e. tels que $[\![\pi_{CF}]\!] = 0$) sont obtenus à partir de l'identification des préfaisceaux et des copréfaisceaux, la condition d'existence des types est donnée par cette identification. En un sens, la théorie des faisceaux donne une définition plus primitive des notions de dualité et de type, en accord avec l'esprit de la GdI. Ce sont les coupures qui définissent la notion de proposition. Nous en voyons bien les deux aspects essentiels : l'aspect *locatif* des atomes d'abord, et l'importance du routage, qui est le compagnon de jeu naturel de la locativité. C'est parce que les atomes sont *localisés* qu'il faut un routage précis pour les trouver.

3.4 Conclusion

On conclut que la théorie des faisceaux fournit un fondement de constructivité à la notion de type, dans la lignée de la géométrie de l'interaction. Ce qui caractérise la notion de type, ou de formule, apparait au travers de l'identification du préfaisceau et du copréfaisceau. Les types apparaissent précisément, dans la catégorie des preuves en interaction, comme les entités logiques qui font dégénérer la dualité d'Isbell en une identification.

Si dualité d'Isbell fournit un fondement de constructivité à un objet fondamental de la logique (les formules), elle ne fournit pas à proprement parler la dualité géométrico-algébrique qui est le ciment de ce volume. Nous avons ouvert ce chapitre sur la dualité syntaxe/sémantique rappelée sur la figure 3.19. Une relecture plus complète de la logique à la lumière de la dualité d'Isbell supposerait de redéfinir plus fondamentalement les notion de syntaxe et de sémantique, c'est-à-dire de construire les catégories d'espace et d'algèbre décrivant la GdI (ou la syntaxe transcendantale). Ce projet est de nature quelque peu différente de ce qui est présenté ici, ne serait-ce que parce que nous n'exhibons qu'une forme affaiblie (dégénérée) de dualité.

$$\begin{tikzcd} \text{syntaxe} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \text{sémantique} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

Figure 3.19 – La dualité syntaxe / sémantique comme adjonction

Nous dirons donc, en guise de conclusion, que cette relecture de la géométrie de l'interaction est en deçà d'une relecture globale de la logique en termes de dualité d'Isbell. Pour vise une telle relecture, il est nécessaire de redéfinir les notions de syntaxe et de sémantique (en termes catégoriques), ou alternativement de redéfinir les foncteurs adjoints F et G qui dualisent les catégories syntaxique et sémantique. Cette relecture suppose de croire en la capacité de la théorie des catégories d'interpréter la GdI. C'est notre conviction (voir également *infra*, Conclusion, 6.3, Sur le caractère pré-hégélien de la dualité d'Isbell).

Deuxième partie

Sciences appliquées

Chapitre 4

Sciences économiques et sociales

Contents

Riassunto

Questo capitolo descrive la dualità di Isbell nelle scienze economiche e sociali, in particolare nella teoria del valore. Per prima cosa identifichiamo la tavola input-output (Quesnay, 1758) e la teoria dell'equilibrio generale (Walras, 1874) rispettivamente come delle teorie di equilibrio economico di prima e seconda generazione. Poi introduciamo una nuova teoria dell'equilibrio economico di terza generazione. Questa nuova teoria generalizza la teoria dell'equilibrio generale nello stesso modo in cui quest'ultima generalizza la tavola input-output. Economicamente, la generalizzazione che proponiamo fa uso di due canali : la teoria monetaria del mercato di Cantillon-Smith e la teoria socio-economica della mediazione sociale. L'idea chiave della teoria è che se aggiungiamo una struttura di interdipendenza (monetaria o sociale) tra gli agenti economici, il problema di equilibrio generale cambia profondamente, perché il rapporto prezzo-quantità diventa circolare. A questo punto diventa impossibile accedere allo spazio del valore senza conoscere l'operazione di *incollaggio* che guida la sua costruzione. La conclusione è che l'*incollaggio* è l'espressione del legame sociale tra gli agenti economici (consumatori, produttori, banche).

Résumé

Ce chapitre aborde la dualité d'Isbell en sciences économiques et sociales, et plus particulièrement dans la théorie de la valeur. Nous commençons par identifier le tableau entrées-sorties (Quesnay, 1758) et la théorie de l'équilibre général (Walras, 1874) respectivement comme des théories d'équilibre économique de première et seconde générations, en montrant en quoi ces théories appartiennent respectivement aux paradigmes $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$. Nous introduisons alors une nouvelle théorie de l'équilibre économique de troisième génération, appartenant au paradigme $\mathfrak{P}_3$. Ce nouveau paradigme généralise la théorie de l'équilibre général de la même façon que cette dernière généralise le tableau entrées-sorties. Économiquement, la généralisation que nous proposons exploite deux filières : la théorie monétaire du marché de Cantillon-Smith et la théorie socio-économique de la médiation sociale. L'idée-clé de la théorie est que si on ajoute une structure d'interdépendances (monétaire, sociale) entre les agents économiques, le problème de l'équilibre général change viscéralement de nature, car la relation prix-quantité prend une tournure circulaire. Il devient impossible d'avoir accès à l'espace de la valeur sans connaître l'opération de recollement qui préside à sa construction. La conclusion est que le recollement est l'expression même du lien social qui lie les agents économiques (consommateurs, producteurs, banques).

Abstract

This chapter deals with Isbell duality in economic and social sciences, and more particularly in the theory of value. We start by identifying input-output table (Quesnay, 1758) and general equilibrium theory (Walras, 1874) respectively as economic equilibrium theories of first and second generations, showing how these theories belong respectively to paradigms $\mathfrak{P}_1$ and $\mathfrak{P}_2$. We then introduce a new third-generation theory of economic equilibrium belonging to the $\mathfrak{P}_3$ paradigm. This new paradigm generalizes general equilibrium theory in the same way that general equilibrium theory generalizes input-output table. Economically, the generalization that we propose exploits two channels : the monetary market theory of Cantillon-Smith and the socio-economic theory of social mediation. The key idea of the theory

is that the addition of a structure of interdependencies (monetary, social) between economic agents changes the nature of the problem of general equilibrium, because the price-quantity relationship takes a circular turn. It becomes impossible to have access to the space of value without knowing the gluing operation which guides its construction. The conclusion is that the gluing operation is the very expression of social bond between economic agents (consumers, producers, banks).

4.1 Ruptures paradigmatiques et économie

Nous nous donnons à présent les sciences économiques et sociales comme nouvel espace de réflexion, autour des ruptures paradigmatiques en jeu dans ce volume. Il nous est donné d'interroger la théorie économique pour savoir si de telles ruptures sont à l'oeuvre, et le cas échéant d'en déterminer les contours. Par chance, les sciences économiques offrent des clés de lecture relativement faciles à interpréter comme relevant de processus d'abstraction. Si l'on devait balayer l'histoire de la théorie économique pour chercher un tel processus, c'est assurément dans la naissance de la théorie néoclassique qu'on la trouverait, et plus précisément chez Walras [189].

Walras publie ses *Éléments d'économie politique pure* en 1874. Il s'agit de la première modélisation d'un équilibre économique vouée à l'explication de la formation des prix. Le modèle de Walras se veut être une audacieuse synthèse entre deux écoles françaises : la vieille école physiocratique (pré-classique) et l'école encore naissante des ingénieurs-économistes (pré-néoclassique ou pré-marginaliste). De la première, Walras reprend l'ambition de représenter l'économie dans son ensemble, qui se traduit par l'analyse entrées-sorties (ou TES, tableau entrées-sorties) chez les physiocrates. Comme le rappelle Schumpeter [162], c'est en effet dans le *Tableau économique* de Quesnay (1758) qu'on trouve la première tentative de modélisation d'un équilibre économique [1]. Des économistes-ingénieurs (Cournot et Dupuit), Walras emprunte l'idée de représenter le comportement des agents économiques sous forme mathématique, sous la forme précise d'un système d'équations simultanées. Cette synthèse permet à Walras de conjecturer que le système économique ainsi représenté doit théoriquement posséder un équilibre, puisque le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues.

Dans un premier temps, le modèle de Walras n'attire que peu l'attention, jusqu'à ce que Cassel [25] le simplifie et le fasse découvrir à un large public en 1918. Très brièvement, simplifié par Cassel (on fait précisément référence à la présentation de Le Gall [116]), le modèle de Walras est composé d'une demande x_i^+ et d'une offre x_i^- de biens de consommation $i = 1, ..., m$ échangés au prix p_i, ainsi qu'une demande y_j^+ et une offre y_j^- de facteurs de production $j = 1, ..., m$ échangés au prix q_j. Walras fait l'hypothèse que les biens sont produits à l'aide d'une technologie linéaire caractérisée par des coefficients de fabrication fixes [2] $a_{ji} = y_j^+/x_i^-$ (hypothèse de rendements constants), soit sous forme matricielle $y^+ = A^t x^-$. Les ménages maximisent leur utilité individuelle, ce qui détermine une fonction de demande de biens représentative $x_i^+ = f_i(p_1, ..., p_i, ..., p_m)$ et une fonction d'offre de travail représentative $y_j^- = g_j(q_1, ..., q_j, ..., q_n)$. À l'équilibre concurrentiel, nous avons alors trois adéquations (i) équilibre du marché des biens, (ii) équilibre du marché des facteurs de production et (iii) adéquation des prix des biens avec les prix des facteurs de production (« principe de coût »), soit en utilisant la notation matricielle :

$$\begin{aligned} (i)\ & x = f(p, q) \\ (ii)\ & y = A^t x \\ (iii)\ & p = Aq \end{aligned} \tag{4.1}$$

1. C'est précisément le modèle algébrique d'Isnard (1781) qui semble avoir directement influencé Walras, puisqu'on y retrouve l'emploi de coefficients de fabrication fixes.

2. Dans les premières éditions des *Éléments d'économie politique pure*. Mais il relâchera cette hypothèse dans les éditions ultérieures.

où $x = x^+ = x^-$, $y = y^+ = y^-$, $p := (p_1, ..., p_i, ..., p_m)$, $q := (q_1, ..., q_j, ..., q_n)$ et $f := (f_1, ..., f_i, ..., f_m)$. (i), (ii) et (iii) sont ainsi respectivement des systèmes de m, n et m équations. Puisque les inconnues du système sont les m demandes excédentaires de bien x_i, les n demandes excédentaires de travail y_j et les m prix p_i, on en conclut que le système comporte autant d'équations que d'inconnues.

Dans un premier temps, le débat autour de la conjecture de Walras ne porte pas encore sur la question de l'*existence* d'un équilibre général, mais plutôt sur sa signification. Que signifie l'équilibre général pour une économie de marché ? Est-ce un idéal à atteindre ou une approximation du réel ? Est-ce avant tout un instrument guidant la réflexion théorique ou un instrument empiriquement exploitable ? Doit-il s'adapter au monde réel ou au contraire le guider ? À partir des années 30, le débat prend une tournure hautement mathématique, autour de la question de la résolvabilité du modèle de Walras-Cassel. La littérature produite est alors considérable, et se conclut en apothéose en 1954, avec quatre démonstrations indépendantes de l'existence d'un équilibre général (Arrow et Debreu [9], McKenzie [128], Gale [59], et Nikaido [137]). Hélas, la suite montrera que l'obtention de l'équilibre n'est guère réaliste, ce qui diminuera la portée de la théorie de l'équilibre général (TEG), qui était précisément censée apporter ce qui manque au TES : un mécanisme permettant d'atteindre dynamiquement l'équilibre.

Pour autant, les réflexions de fond ne sont pas laissées pour compte. Dans le même temps, Leontief propose une nouvelle tentative de synthèse entre le TES classique et la TEG de Walras. Voici comment le futur prix Nobel présentera sa thèse en 1941 [120] : « Dans ce modeste ouvrage, l'auteur a tenté d'appliquer la théorie économique de l'équilibre général — ou mieux, de l'interdépendance générale — à une étude empirique des relations qui unissent les différents secteurs d'une économie nationale, telles qu'elles apparaissent à travers les variations des prix, des productions, des investissements et des revenus » (p. 1). On comprend bien la vision de Leontief : le style très mathématique (pour l'époque) de Walras avait fini par faire perdre de vue l'ambition empirique des premiers artisans de la théorie de l'équilibre, qui était originellement destinée à documenter l'Autorité économique (via la comptabilité nationale). Mais Leontief ne tarde pas à réaliser l'extrême difficulté d'intégrer la théorie néoclassique de la valeur dans le cadre classique d'un TES, si bien qu'il est contraint de simplifier à son tour le modèle de Walras. Il parvient, comme Walras, à représenter l'économie sous forme d'un système d'équations simultanées, mais, peu à l'aise avec ce qu'il appelait la « métaphysique de la valeur », il renonce à incorporer les équations walrassiennes d'offre et de demande.

Chez Walras, des simplifications drastiques sont déjà à l'oeuvre pour limiter la complexité du modèle (par exemple la fixité des coefficients de fabrication). Mais les fonctions comportementales ne sont pas sacrifiées : les quantités et les prix d'équilibre sont bien *in fine* le résultat des comportements des offreurs et des demandeurs. Ce n'est pas le cas chez Leontief, où elles sont le résultat de l'emploi de coefficients techniques (le coefficient de travail fixant la répartition salaires/profits, les coefficients techniques de production fixant la technologie de fabrication et les coûts de production). Or, comme l'explique Leontief lui-même, les *coefficients techniques ne sont constants qu'à prix donnés.*

Leontief avait voulu unifier le TES et la TEG, pour réunir un socle théorique et un cadre d'analyse empirique dans un modèle unique, mais avait dû se rabattre sur un TES de facture très classique, faute d'outils adéquats à l'époque. Il en résulte un socle théorique dégénéré qui peut apparaitre au mieux comme une promesse d'ouverture pour des modèles de prochaine génération [3]. Samuelson [157] résumera parfaitement la situation en 1959 : le TES de Leontief avait la TEG de Walras dans son viseur en ce sens que la théorie classique (qui raisonne à coefficients constants), n'est qu'un cas particulier de la théorie néoclassique.

Nous avons finalement identifié deux paradigmes très différents. Avec le TES, les (pré)classiques se fixaient pour objectif d'analyser les interdépendances économiques dans le but de prévoir l'impact d'un changement dans un secteur d'activité donné (analyse entrées-sorties). Sa nature était descriptive et prescriptive. Avec la TEG, les néoclassiques se donnaient pour tâche d'expliquer comment se fixent les quantités et les prix des biens dans une économie, afin d'établir une situation d'optimum macroéconomique. Originellement, sa nature était essentiellement normative.

Sur le plan paradigmatique, on retrouve exactement notre enchainement $\mathfrak{P}_1 \rightarrow \mathfrak{P}_2$.

- $\mathfrak{P}_1$ correspond au paradigme « ponctuel » d'un circuit économique dont on saisit une coupe à un instant t, qui fige les comportements des agents ;

- $\mathfrak{P}_2$ correspond au paradigme fonctionnel d'une économie dont on saisit la formation des prix grâce à des fonctions d'offre et de demande.

$\mathfrak{P}_2$ offre donc une vision plus organique que $\mathfrak{P}_1$, et on vérifie qu'on ne perd rien en passant de $\mathfrak{P}_1$ à $\mathfrak{P}_2$. Le travail de Leontief semble démontrer le contraire (puisqu'il a tenté en vain « d'appliquer la théorie économique de l'équilibre général »), mais ses successeurs ont eux réussi, et en cela il a réussi, ouvrant la voie à une nouvelle génération de travaux plus proche de l'idée de départ, qui était de construire une TEG utilisant des données économiques réelles (comme le modèle de Graham ou le modèle de McKenzie). L'union du socle théorique et de l'intérêt pratique, chère à Leontief, est aujourd'hui scellée dans les modèles d'équilibre général calculable (ce qui montre que la TEG sait aussi être descriptive).

Se pose alors la question de l'enchainement $\mathfrak{P}_2 \rightarrow \mathfrak{P}_3$. $\mathfrak{P}_3$ a-t-il un sens en économie ? La question est à tiroirs : (i) les sciences économiques offrent-elles, dans leur état actuel, une représentation redevable de $\mathfrak{P}_3$? (ii) si non, sommes-nous justifiés à lui en donner une, i.e. en quoi celle-ci serait meilleure qu'une représentation redevable de $\mathfrak{P}_2$? Pour y répondre, commençons par rappeler quelques unes des principales questions de la théorie économique.

4.2 La question de l'auto-régulation du marché

L'une des principales questions de la théorie économique et celle de l'auto-régulation du marché. Lorsque, au début des années 1970, l'unicité et la stabilité de l'équilibre économique furent durement mises en doute, les réactions de la profession furent l'abandon et l'obstination. Pour les uns, il s'agissait simplement d'entériner les résultats négatifs obtenus, qui ne permettaient pas de poursuivre le projet (néo-)walrassien. Pour les autres, il s'agissait de trouver tant bien que mal des solutions, quitte à s'égarer dans un lacis technique en abandonnant sans scrupule le sens de

3. Du reste, il avouera plus tard que son modèle n'était pas un modèle d'équilibre. C'est bien dans ce sens qu'il faut interpréter sa préférence pour le terme d'*interdépendance* (sans équilibre) : « Sans doute, voulais-je légitimer ma théorie, lui donner une 'provenance aristocratique », confiera-t-il dans un entretien de fin de carrière pour justifier la paternité walrassienne. « S'il y a une influence, c'est surtout celle des économistes classiques ». *in* Rosier [152], p. 89.

l'économie politique [4].Mais le plus étonnant est que les économistes n'ont pas été conscients qu'une troisième voie de recherche était possible : celle de la reproblématisation. Pourtant, cette voie était depuis longtemps balisée. Les économistes ont simplement oublié que la direction empruntée par Walras n'avait jamais été celle suggérée par les fondateurs, et notamment par Adam Smith [169]. Nous allons présenter une reproblématisation néo-smithienne de la question de l'auto-régulation du marché.

4.2.1 Une intuition classique pour (re)commencer

Il n'est pas nécessaire d'entrer dans une discussion complexe pour saisir la différence radicale qui sépare les deux familles de représentation de l'économie de marché [5]. Elle sépare en fait deux formulations distinctes de la fameuse loi de l'offre et de la demande.

Dans la tradition néoclassique, la dite « loi de l'offre et de la demande », loin d'être une *proposition* obtenue par la théorie (comme le laisse entendre le terme de « loi »), n'est que le nom d'une *hypothèse* de variation des prix paramétriques, c'est-à-dire des prix auxquels les agents calculent et déterminent leurs demandes excédentaires de biens. Le sens de variation du prix sur le marché d'un bien quelconque est supposé être de même signe que celui de la demande excédentaire agrégée constatée sur ce marché. Le fait est que cette règle ne reflète le comportement d'aucun agent. Elle n'est pas susceptible d'être justifiée de façon microéconomique et elle ne permet pas de déterminer le *niveau* du prix en dehors de l'équilibre. On pourrait s'en consoler, en pensant qu'elle « mime » le marché — conformément aux attentes de Walras qui voyait dans les marchés concrets un tel mécanisme à l'oeuvre — si elle n'était pas en outre inefficace. En effet, si l'existence de l'équilibre pu enfin être établie, puis étendue à des hypothèses de plus en plus générales, la question de l'unicité et de la stabilité de l'équilibre a trouvé *a contrario* un aboutissement négatif en 1973-1974, avec le théorème de Sonnenschein-Mantel-Debreu [170] [125] [37]. Loin de remettre en cause l'idéal walrassien [6], ce résultat n'a fait que réorienter la recherche autour de l'équilibre général, dans des officines dont on ne sait plus si elles participent du point de vue normatif de Walras ou du point de vue descriptif de Hicks et Samuelson. Que faire d'une règle qui n'est ni fondée microéconomiquement ni concluante macroéconomiquement ? Ces questions ont été pour l'essentiel éludées. L'orthodoxie n'a jamais renoncé à invoquer la « loi de l'offre et de la demande », passée du statut d'hypothèse à celui d'article de foi.

Dans la tradition classique, la loi de l'offre et de la demande désigne *a contrario* une *proposition positive* sur l'évolution effective du niveau des prix observables

4. Égarements déjà sévèrement critiqués par Leontief ou Georgescu-Roegen, pour être, selon une célèbre critique de ce dernier, « non seulement dépourvus d'intérêt économique, mais aussi sans valeur mathématique » [64], p. 437. En effet, outre l'inflation mathématique dont ils se rendent coupables, ces travaux d'économie mathématique ont de surcroit perdu de vue le « système vaste et simple qui ressemble en beauté pure à l'univers astronomique » voulu originellement par Walras — pourtant l'un des fondateurs de l'économie mathématique.

5. Je dois la découverte de la représentation smithienne de l'économie de marché à Jean Cartelier, que je remercie vivement. Cette section doit beaucoup à la lucidité et à la limpidité de ses analyses. Une première version de cette section avait été co-écrite avec lui en 2004, mais était restée non publiée.

6. Sans doute parce que, au fond, ce résultat n'était une surprise pour personne. Walras lui-même exprimait déjà son pessimisme.

au marché. Elle résulte d'une règle de détermination des prix indépendante des conditions d'équilibre. Un tel mécanisme de marché est ébauché dès les physiocrates — par Cantillon [24] notamment — avant d'être décrit par Smith dans la *Richesse des nations* [169], puis de manière implicite dans le *Treatise on Money* de Keynes [103], pour finalement faire l'objet d'un traitement explicite dans la théorie moderne des jeux stratégiques de marché. Il se laisse résumer par la proposition suivante : *le prix de marché est le rapport constaté entre la quantité des moyens de paiement appuyant la demande des quantités demandées et la quantité du bien portée au marché pour y être vendue.* Le numérateur de cette fraction est l'agrégation des valeurs des demandes individuelles. Chacune d'entre elles est le produit du prix attendu (ou paramétrique) par les quantités demandées (résultant, par exemple, de la maximisation de l'utilité sous les contraintes budgétaires usuelles aux prix attendus). Le dénominateur est l'agrégation des offres individuelles. Chacune d'entre elle résulte du programme de maximisation qui vient d'être évoqué.

Formellement, si $i \in \mathbb{I} := \{1, ..., I\}$ désigne les individus, $j \in \mathbb{J} := \{1, ..., J\}$ les biens, $\hat{x}^+_{ij}$ et $\hat{x}^-_{ij}$ respectivement les demandes excédentaires positives et négatives de bien j par l'individu i au prix attendu $\hat{p}_j$ (supposé identique pour tous les individus pour simplifier), et m_{ij} la dépense de l'individu i sur le marché j, le prix de marché p_j du bien j est donné par la règle suivante :

$$p_j = \frac{\sum_i \hat{p}_j \hat{x}^+_{ij}}{\sum_i x^-_{ij}} = \frac{\sum_i m_{ij}}{\sum_i x^-_{ij}}. \tag{4.2}$$

Cette règle — que nous appellerons *règle de Cantillon-Smith* — établit donc que les marchés apurent à la fois l'offre de bien ($\hat{x}_j = x_j$) et les dépenses de liquidités ($\hat{m}_j = m_j$). Lorsque la demande est supérieure (inférieure) à l'offre, le prix de marché est plus grand (plus petit) que le prix attendu. Pour obtenir comme *résultat* (et non comme hypothèse) la loi de l'offre et de la demande classique, il faut supposer qu'un excès de la demande conduise à une hausse du prix attendu (paramétrique) et qu'un excès d'offre entraîne une baisse.

Achevons de caractériser très brièvement les différences qui découlent de ces deux conceptions différentes en ce qui concerne l'étude de la dynamique. Dans le cas standard néo-walrassien, les individus ne sont jamais en déséquilibre puisque leurs plans sont déterminés à chaque période comme solution d'un programme d'optimisation. Ce sont, en revanche, les marchés qui peuvent l'être. De ce fait, la seule réaction au déséquilibre susceptible d'exister est celle d'un non-individu — le secrétaire de marché — seul capable d'observer le marché (les demandes excédentaires agrégées) et de modifier les prix (les individus sont *price-takers*). C'est précisément ce qui est résumé par la « loi de l'offre et de la demande » walrassienne.

Dans le cas classique, que l'on pourrait qualifier par symétrie de *néo-smithien*, les marchés sont toujours soldés. Les quantités offertes sont vendues (apurement de l'offre) mais pas forcément au prix attendu. Symétriquement, les individus dépensent au marché les sommes qu'ils ont décidé mais n'obtiennent pas toujours les quantités qu'ils désiraient [7] (apurement des liquidités). Il en résulte que l'état des marchés est

7. Cette description serait modifiée si l'on introduisait le principe d'échange volontaire qui veut qu'aucun individu ne peut recevoir plus de bien qu'il n'en a demandé. Dans cas, les dépenses décidées ne sont pas toutes réalisées, l'agent obtenant du marché la quantité qu'il a demandée plus la quantité de monnaie inutilisée). Du coup, les vendeurs ne réussissent pas à vendre tout ce qu'ils ont porté au marché et les marchés ne sont pas tous soldés. Les quantités demandées sont obtenues si le marché considéré est en excès d'offre. Les quantités demandées ne sont pas obtenues si le

sans intérêt (ce qui tombe bien car personne ne peut les observer) et que seuls les individus peuvent dire s'ils sont ou non en équilibre. Cela est également heureux car eux seuls ont la capacité de réagir à ces déséquilibres constatés, ce qu'ils font en modifiant, au marché suivant, les quantités offertes et demandées, sans manipuler les prix. Typiquement, la réaction des agents économiques est souvent présentée sous la forme d'un processus de correction d'erreur, soit, sous l'hypothèse classique de l'agent représentatif, sous la forme suivante :

$$\hat{p}'_j(t) = \chi_j(p_j(t) - \hat{p}_j(t)), \ \forall j \in \mathbb{J} \tag{4.3}$$

où $\hat{p}'(t) := d\hat{p}(t)/dt$ et où $\chi(.)$ vérifie $\chi'_j(.) > 0$ et $\chi_j(0) = 0$.

Ainsi, conforme à l'idée de l'offre et de la demande, l'évolution des prix est la résultante de ces modifications anonymes des quantités, et non de la réaction hypothétique d'un non moins hypothétique secrétaire de marché.

On pourrait penser qu'il existe une parenté entre la dynamique classique qui vient d'être esquissée et les modèles dits de non-tâtonnement. Ce qui inciterait à un tel rapprochement entre ces deux types de modèles est le fait qu'ils autorisent tous deux, à la différence du tâtonnement walrassien, des transactions effectives indépendamment de toute condition d'équilibre. Mais, alors que dans les modèles de non-tâtonnement l'absence d'un moyen général de paiement contredit une de leurs hypothèses cruciales, le mécanisme de marché adopté ici évite cette difficulté. On peut penser que, du même coup, il tombe dans une autre : l'impossibilité, même théorique, de montrer que les processus concurrentiels de marché sont globalement stables, même avec de « bonnes » fonctions d'anticipation. Mais c'est oublier que la régulation du marché visée ici n'est justement pas du type walrassien. Dans le cas néo-smithien, la régulation du marché ne prend pas la forme d'un mécanisme de prix (lesquels sont non manipulables par hypothèse), mais d'un mécanisme nominal manipulé par l'autorité monétaire : *la régulation de la quantité de moyens de paiement mise à disposition des individus*, quantité qui, en vertu de la contrainte *cash-in-advance*, intervient dans le niveau des dépenses effectives. De l'action imaginaire du secrétaire de marché, on passe à l'action délibérée du système bancaire.

Nous avons donc identifié deux modèles caractérisant deux mécanismes de régulation bien différents.

- Le premier conçoit l'équilibre comme l'adéquation centralisée des prix suivant la loi de l'offre et de la demande. Ce modèle peut se résumer par l'axiomatique de « Walras-Arrow-Debreu », à savoir la théorie de l'équilibre général walrassien / néo-walrassien. Si nous tenons à rappeler que l'approche néoclassique n'est pas monolithique, il nous faut insister sur le fait qu'il s'agit toujours d'un équilibre de prix, même lorsque la monnaie est prise en compte dans le système de prix. C'est le dénominateur commun des modèles néo-walrassiens, appelés comme tels pour cette raison.

- Le second renvoie l'équilibre à un problème de régulation monétaire, dans une tradition smithienne. Ce modèle qualifié de néo-smithien se distingue du modèle néo-walrassien par le fait (fondamental) que les prix ne sont pas requis par l'équilibre ; ils sont déterminés par l'économie selon le rapport entre les dépenses faites pour les acquérir et les quantités offertes à la vente.

marché considéré est en excès de demande (mais la dépense prévue est réalisée).

> Comme il n'y a aucune raison *a priori* que l'économie s'autorégule, *l'équilibrage macroéconomique incombe finalement à la quantité des moyens de paiement mise à disposition de l'économie.*

La caractérisation de la dynamique esquissé en 4.3 parachève le contraste entre les deux modèles (tableau 4.1). Dans le modèle néo-smithien, la dynamique caractérise les corrections microéconomiques plutôt que le tâtonnement macroéconomique. L'équilibrage néo-smithien ne relève pas d'un *processus à satisfaire par une instance fictive ad hoc*, mais d'une *adéquation synchronique (en principe) satisfaite par l'économie réelle*. Le diagnostic s'inverse quant à l'ajustement des individus aux données du marché : le mécanisme de marché néo-smithien aboutit à un *processus* de correction des prix, là où la dynamique walrassienne aboutit aux échanges microéconomiques, en toute synchronie. Ce faisant, le modèle néo-smithien caractérise bien la dynamique là où elle peut être observée : au niveau décentralisé.

	Théories de l'équilibre macroéconomique	
	Néo-walrassienne	**Néo-smithienne**
Mode d'équilibrage	Par les prix	Par la monnaie
Nature de l'équilibre	Réelle	Réelle et nominale
Instance d'équilibrage	Fictive (secrétaire de marché)	Réelle (banques)
Ajustement des prix	Virtuel et centralisé	Réel et décentralisé
Statut de la loi de l'offre et de la demande	Requise (par le réglage des prix)	Obtenue (par le réglage monétaire)
Nature de la théorie	Normative	Descriptive

Table 4.1 – Deux théories de l'équilibre macroéconomique

4.2.2 Le problème de coordination monétaire

Le modèle d'équilibre général qui vient d'être brièvement exposé est très différent des modèles walrassiens d'équilibre général monétaire à la Hahn. Ces derniers ne donnent à voir rien de plus qu'une monnaie comme intermédiaire des échanges : la monnaie n'intervient que pour éliminer le problème de la double coïncidence des besoins. Comme l'a montré Hahn dès 1965 [85], cette conception de la monnaie pose en réalité davantage de problèmes qu'elle n'en résout, car son introduction implique l'incompatibilité entre trois propriétés des biens : (i) ils ont une utilité propre (ii) leur prix obéit à la loi de l'offre et de la demande, (iii) leur prix résultant de cette loi est positif. Si l'on tient à conserver (ii) pour établir le concept de monnaie, il faut abandonner (i), sachant que (iii) est inhérente à tout bien. Cet abandon conduit alors au « problème du prix positif de la monnaie » identifié par Patinkin [141]. Dans le cas contraire, si la monnaie a une utilité propre, nous avons un problème de cohérence entre deux lois de formation des prix pour un même bien.

Puisqu'elle *produit* — et non présuppose — la propriété (ii), l'approche monétaire qui est développée ici n'est pas concernée pas ces difficultés. En contrepartie, la conception de la monnaie que nous défendons va bien au delà des fonctions « utilitaires » usuelles (monnaie comme numéraire, instrument d'échange et réserve de valeur). Elle y ajoute une fonction macroéconomique, la monnaie comme *instrument* *de financement de l'économie*, voire une fonction socio-économique, comme instrument de politique économique. C'est dire qu'il s'agit d'une conception wicksellienne, ou néo-wicksellienne, de la monnaie. Wicksell [193], avant Keynes et Schumpeter, insiste sur la rupture radicale que l'existence supposée d'un système bancaire introduit dans la régulation du marché. Son argument est que, les banques n'étant pas soumises à une contrainte de capital, l'égalisation nécessaire du taux d'intérêt fixé par les banques (i.e. le coût du capital) et du taux de profit réalisé par les emprunteurs (i.e. le rendement du capital) ne se fait pas au moyen de la loi de l'offre et de la demande, mais par la variation des prix monétaires. Le système bancaire fixe, selon un comportement qui lui est propre, le taux d'intérêt que les emprunteurs prennent comme donné pour le calcul de leurs demandes de prêts. C'est en ce sens que la monnaie est « réelle » : elle détermine les plans d'action des agents. A ce taux d'intérêt, les demandes de capital sont satisfaites par le crédit bancaire, ce qui détermine de façon endogène les prix monétaires. Ces prix, qui ne sont pas généralement des prix d'équilibre, servent, selon Wicksell, de base de calcul pour les décisions des participants au marché suivant. Dans une telle représentation, c'est le système bancaire qui fixe le ou les taux d'intérêt paramétriques et non un secrétaire de marché. Le comportement du système bancaire, à la différence de celui de l'*auctioneer,* est bien fondé microéconomiquement.

L'adoption de la loi classique de l'offre et de la demande de préférence à sa version néoclassique usuelle entraîne cette conséquence remarquable que *les prix ne sont pas les régulateurs du marché* au sens où leur détermination ne possède aucun degré de liberté. Les prix et les allocations de marché ainsi que les avoirs nets monétaires sont des variables d'état qu'il est dépourvu de sens de prétendre manipuler. Les variables candidates à une telle régulation sont autres, par exemple les taux d'intérêt que le système bancaire impose aux différents agents. Parmi toutes les configurations de ces variables, certaines sont d'équilibre, d'autres non. La question de la régulation devient maintenant plus ouverte. Il ne s'agit plus de démontrer la stabilité d'une règle préétablie (la loi de l'offre et de la demande) mais de rechercher l'ensemble des configurations de l'économie telle qu'il existe toujours au moins une règle de régulation assurant l'équilibre économique. La régulation monétaire de l'économie s'incarne alors dans deux composantes.

- Une composante micro-monétaire, qui correspond à la régulation de l'économie par les banques de second rang, grâce aux taux d'intérêt et aux contraintes de liquidités. Cette composante contient elle-même des sous-régulations distinctes pour les ménages et pour les firmes.

- Une composante macro-monétaire, qui correspond au contrôle de la masse monétaire par la banque centrale. On rappelle que ce contrôle peut se concevoir de façon directe (sur l'agrégat monétaire) ou indirecte (via le taux d'intérêt).

Le problème de régulation monétaire se présente alors sous la forme d'une cascade : à la banque centrale le soin d'ajuster la masse monétaire, c'est-à-dire de contraindre l'offre de monnaie des banques de second rang ; à ces dernières le soin de diffuser au mieux le crédit disponible dans l'économie, grâce aux taux d'intérêt et aux contraintes de liquidité. On dit que les banques de second rang résolvent le problème de *l'adéquation qualitative de la monnaie*, la banque centrale celui de *l'adéquation quantitative de la monnaie.*

Formellement, les demandes excédentaires anticipées $\hat{x}_{ij}$ dépendent du prix anticipé $\hat{p}_i$ ainsi que de paramètres monétaires : le taux d'intérêt et les encaisses préalables. Nous considérons pour simplifier un modèle symétrique où l'offre et la demande dépendent d'un unique taux d'intérêt r (taux d'intérêt identique pour les crédits aux consommations intermédiaires et finales), et d'une contrainte de liquidité à la Clower (*cash-in-advance*) : $\forall i, \Sigma_j p_j x_{ij} \leqslant \mu_i$. Les agents économiques tiennent compte de ces conditions monétaires pour élaborer leur plan de production et de consommation. Les fonctions de demande excédentaires peuvent ainsi s'écrire, en toute généralité, $\sum_i \hat{x}^+_{ij} =: \hat{x}^+_j = f^+_j(\hat{p}, \mu, r)$ et $\sum_i \hat{x}^-_{ij} =: \hat{x}^-_j = f^-_j(\hat{p}, \mu, r)$, où p et μ sont respectivement le vecteur des prix et le vecteur des encaisses préalables. La règle de Cantillon (4.2) peut alors se réécrire $p_j f^-_j(\hat{p}, \mu, r) = \hat{p}_j f^+_j(\hat{p}, \mu, r)$. On rappelle que cette règle fixe deux hypothèses d'apurement : (i) $x^-_j = f^-_j(\hat{p}, \mu, r)$ traduit l'apurement des biens portés aux marchés pour y être vendus, tandis que (ii) $p_j x^-_j = m_j$ traduit l'apurement des liquidités apportées sur les marchés pour y être dépensées. Pour introduire la problématique walrassienne d'équilibre *réel*, il faut ajouter l'apurement de la demande réelle, c'est-à-dire (iii) $f^+_j(\hat{p}, \mu, r) = f^-_j(\hat{p}, \mu, r)$.

Soit $f(\hat{p}, \mu, r) := (f_j(\hat{p}, \mu, r))_{j \in \mathbb{J}} := (f^+_j(\hat{p}, \mu, r) - f^-_j(\hat{p}, \mu, r))_{j \in \mathbb{J}}$ le vecteur de demande non satisfaite aux prix anticipés $\hat{p}$ et soit (μ, r) un couple de taux d'intérêt et d'encaisses préalables. Il est alors possible de définir une *régulation monétaire d'équilibre* π^* comme étant une régulation monétaire apurant la demande réelle, i.e. telle que $f(\hat{p}, \mu, r) = \mathbf{0}$. Par suite nous pouvons également définir une *correspondance de régulation monétaire d'équilibre* Π^* comme étant l'ensemble des régulations monétaires d'équilibre.

Cependant, il n'y a aucune raison que la correspondance de régulation monétaire d'équilibre soit non vide. D'un autre côté, il faut comprendre que la régulation des facteurs monétaires (plutôt que celle des prix) fait subir à la notion d'équilibre général non seulement un changement théorique majeur, mais également un changement méthodologique profond. Dans le modèle standard, quelle que soit la variante considérée, on suppose toujours que la variable d'ajustement est bien identifiée. Le problème est donc parfaitement connu, et trouve en général sa solution dans l'application d'un théorème de point fixe. Le modèle alternatif que nous suggérons remet en cause cette vision au profit d'une vision « constructiviste ». Le propos n'est pas tant de remplacer une variable de régulation par une autre que de *problématiser cette variable*, et même mieux, problématiser une fonction de régulation. Autrement dit, les conditions de possibilité d'une solution au problème de l'équilibre général ne s'incarnent pas dans une variable prête à l'emploi (d'ailleurs impossible à manipuler), mais dans une fonction qui reste à définir, et qui implique l'ensemble de l'économie. Le couple (μ, r) n'est effectivement pas une variable (multidimensionnelle), mais une fonction qui admet comme arguments les données économiques (les prix, les coefficients de production, les préférences, les dotations monétaires initiales, etc.). Les définitions précédentes peuvent alors être précisées de la façon suivante.

Définition 76 (Régulation monétaire)**.** *On appelle* régulation monétaire *une fonction $\phi : \mathbb{R}^{2J} \to \mathbb{R}^{I+1}, (x, m) \mapsto (\mu, r)$ qui associe à un vecteur de demande de bien x et de dépenses monétaires m une régulation monétaire composée d'un vecteur de contraintes de liquidités μ et d'un taux d'intérêt r.*

Définition 77 (Réaction économique)**.** *On appelle* réaction économique *la fonction de réaction $\psi : \mathbb{R}^{I+1} \to \mathbb{R}^{2J}, (\mu, r) \mapsto (\hat{x}, \hat{m})$ qui à un vecteur de contraintes de* *liquidités* μ *et un taux d'intérêt* r *associe un vecteur de demandes attendues* $\hat{x}$ *et de dépenses attendues* $\hat{m}$.

Ces définitions peuvent s'interpréter en termes de jeu entre l'autorité monétaire et son environnement, l'économie. La première fixe une stratégie de régulation monétaire (μ, r) en fonction d'un objectif (x, m) à atteindre, et l'économie répond par un choix de demandes et de dépenses attendues $(\hat{x}, \hat{m})$. Dans ce cadre, la problématique néo-smithienne consiste à choisir une *régulation monétaire d'équilibre*, telle que la réponse de l'économie coïncide avec l'objectif fixé par l'autorité monétaire. Le système bancaire joue alors un rôle d'intermédiation entre l'espace des individus et l'espace des biens :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^{2J} & \to & \mathbb{R}^{I+1} & \to & \mathbb{R}^{2J} \\ \Cup & \phi & \Cup & \psi & \Cup \\ (x,m) & \mapsto & \phi(x,m) & \mapsto & \psi(\phi(x,m)) \end{array}$$

On peut alors définir une régulation monétaire d'équilibre général en termes d'algèbres d'opérateurs :

Définition 78 (Régulation monétaire d'équilibre)**.** *On appelle* régulation monétaire d'équilibre*, notée* ϕ^**, une régulation monétaire dont l'objectif est atteint, i.e. telle que*

$$[\psi]\phi^* = (x, m).$$

Cette régulation monétaire d'équilibre a pour conséquence immédiate de solder les marchés, c'est-à-dire d'apurer la demande globale non satisfaite : $f(\hat{p}, \mu, r) = \mathbf{0}$, et par suite d'assurer la stabilité des prix attendus, puisqu'il n'y pas d'erreur d'anticipation des individus dans les prix attendus : $\hat{p}_j'(t) = 0, \ \forall j \in \mathbb{J}$.

De la notion de régulation monétaire d'équilibre, on déduit celle correspondance de régulation monétaire d'équilibre.

Définition 79 (Correspondance de régulation monétaire d'équilibre)**.** *On appelle* correspondance de régulation monétaire d'équilibre*, notée* Φ^**, l'ensemble des régulations monétaires d'équilibre, i.e.*

$$\Phi^* = \{\phi^* \in \mathbb{R}^{I+1} \mid [\psi]\phi^* = (x, m)\}.$$

Toutes les régulations monétaires ne sont pas équivalentes. Il faut distinguer les régulations monétaires qualitatives (microéconomiques) et les régulations monétaires en outre quantitatives (macroéconomiques) impliquant l'intervention de la banque centrale sur l'agrégat monétaire $\mathbf{m} := \Sigma_i m_i$.

Définition 80 (Correspondance de régulation monétaire qualitative)**.** *On appelle* correspondance de régulation monétaire qualitative *l'ensemble des régulations monétaires à masse monétaire donnée, i.e. l'ensemble* $\Phi_{\overline{\mathbf{m}}}$ *tel que*

$$\Phi_{\overline{\mathbf{m}}} = \{\phi \in \mathbb{R}^{I+1} \mid \Delta\mathbf{m} = 0\}.$$

Définition 81 (Correspondance de régulation monétaire quantitative)**.** *On appelle* correspondance de régulation monétaire quantitative *l'ensemble des régulations monétaires avec régulation de la masse monétaire, i.e. l'ensemble* $\Phi_{\Delta\mathbf{m}}$ *tel que*

$$\Phi_{\Delta\mathbf{m}} = \{\phi \in \mathbb{R}^{I+1} \mid \Delta\mathbf{m} \neq 0\}.$$

Ces quelques définitions donnent un aperçu du problème complexe qui se pose au système bancaire, qui vont au-delà du traitement habituel de l'équilibre général dans le modèle walrassien. On remarquera la notation $[\psi](.)$, différente de la notation fonctionnelle $\psi(.)$ habituelle. Sans développer ce point maintenant (il est traité plus longuement dans la section suivante), nous dirons simplement que cette notation doit s'interpréter comme une application : il s'agit d'appliquer la fonction ψ à la fonction ϕ pour obtenir le résultat visé. Ce principe d'équilibrage diffère de la notion de point fixe habituelle, selon laquelle il s'agit de trouver un prix d'équilibre p^* égalisant l'offre et la demande (i.e. tel que $O(p^*) = D(p^*)$). Dans la section suivante, nous allons expliciter en quoi, mathématiquement, il s'agit d'une approche de nouvelle génération. Par la force des choses, les deux approches diffèrent aussi sur le plan méthodologique. Si elles traitent fondamentalement des conditions d'existence de l'équilibre général, l'approche axiomatique néo-walrassienne porte son attention sur des propriétés sur lesquelles il n'est pas possible d'agir (préférences, technologie, prix), tandis que l'approche néo-smithienne met l'accent sur les conditions d'existence de la régulation proprement dite. C'est en cela que cette dernière peut être qualifiée de « constructiviste » : elle s'intéresse à la *construction* de l'équilibrage, non à la résolution de l'équilibre. À tout le moins s'agit-il d'un constructivisme de nouvelle génération (ici aussi), si l'on accepte l'idée que la théorie walrassienne incarne déjà la construction d'un modèle d'équilibre ; et dans ce sens on passe de la construction du modèle d'équilibre à celle du mode d'équilibrage [8].

La représentation qui vient d'être exposée est finalement une synthèse entre un modèle walrassien, un modèle smithien et un modèle wicksellien. Elle reprend l'ambition du modèle walrassien (l'équilibre général), le mécanisme de marché de l'analyse smithienne (loi de l'offre et de la demande *a posteriori)* et le rôle du système bancaire de l'analyse wicksellienne afin de faire cohabiter l'ambition walrassienne et le mécanisme smithien. Cette représentation est donc un approfondissement du modèle néoclassique, puisqu'elle réunit en un seul modèle les analyses classique, néoclassique et institutionnelle. Cet approfondissement débouche sur une première représentation « opératorielle » (au sens de la théorie des opérateurs, *cf. supra* introduction), et constructive de l'économie. Pourtant, il est possible de défendre la représentation opératorielle même dans un modèle strictement walrassien. Nous allons en effet montrer que la méthodologie et les mathématiques sous-jacentes défendues ici peuvent même s'appliquer, sous certaines conditions, à l'analyse néo-walrassienne. C'est précisément le cas si l'on accepte de généraliser un tant soit peu la médiation marchande.

8. Il faut en effet se souvenir que la première étape de la TEG fut la *construction* d'un système d'équations simultanées avec autant d'équations que d'inconnues, avant que Wald ne propose une réelle résolution du modèle. Cet épisode a été bien illustré dans les années 30, en premier lieu par Menger [131] et Wald [188], puis par Hicks [88] et Samuelson [155] [156]. En 1939, Hicks [88] invitait ainsi à « dépasser le simple stade du décompte des équations et des inconnues et de proposer des lois générales gouvernant le fonctionnement d'un système de prix sur un marché multiple » (p. 6). L'invitation faisait en effet échos à cinq décennies de sommeil, pendant lesquelles les économistes ne faisaient que vérifier l'égalité du nombre d'équation avec le nombre d'inconnues. Le problème, c'est que cette égalité n'est ni une condition nécessaire ni une condition suffisante à l'établissement de l'équilibre général. Du reste, comme l'a montré von Stackelberg [171], il faut se souvenir que le modèle de Cassel n'admet pas de solution si le nombre de ressources est supérieur au nombre de biens. En outre, il faut enfin s'assurer que les solutions aient réellement un sens économique (exhibant en particulier des prix positifs). L'approche néo-smithienne esquissée ici invite donc à reprendre ces questionnements, dans le cadre d'une approche enrichie par les conditions monétaires de l'économie.

4.3 La question de l'objectivité de la rareté

La théorie de la valeur repose traditionnellement sur deux piliers : une théorie du (mécanisme de) marché et, en amont, une théorie de la rareté. Nous avons conclut à l'inadéquation du paradigme fonctionnel lorsque la théorie du marché est néo-smithienne plutôt que néo-walrassienne. Mais que se passe-t-il si on porte maintenant notre attention sur l'approfondissement de la théorie de la rareté ? Que se passe-t-il si, tout en gardant la version walrassienne de la loi de l'offre et de la demande, on élargit la conception de la rareté ?

4.3.1 La séparation marchande

Dans la représentation néoclassique de l'économie, les individus n'ont aucun lien direct entre eux. Il n'ont pas besoin de se rencontrer car leurs plans d'achats sont fixés à l'avance, ce que la théorie traduit par la notion de « préférences individuelles » exogènes et indépendantes (soit sous la forme d'une relation de préférence binaire $\geq$, soit sous la forme d'une fonction d'utilité ordinale $U(.)$). Il n'ont donc aucun besoin de se rencontrer. D'ailleurs, ils n'y sont pas franchement invités, car toute rencontre peut compromettre la neutralité du mécanisme de marché, i.e. le travail du secrétaire de marché (ils doivent restés *price-takers*). Cette représentation de l'économie donne donc à voir une relation marchande totalement intermédiée par le marché. C'est ce qu'Orléan [138] appelle l'hypothèse de « séparation marchande ». La séparation marchande exprime un rapport aux autres intégralement déclassé par le rapport aux choses. Ne reste de l'expérience des autres que le lointain signal des forces impersonnelles froidement calculé par le crieur de prix. Or cette hypothèse extrême est doublement mise en défaut :

- lorsque le rapport aux choses a besoin du rapport aux autres.
- lorsque le rapport aux autres impose directement sa propre logique.

La première situation renvoie aux situations d'asymétrie d'information. Lorsque la qualité des biens n'est pas connue avec certitude, l'échange devient difficile voire impossible, comme l'ont montré Akerlof [2] ou Stiglitz [172]. Dans ce cas, les acheteurs se tournent vers les comportements des vendeurs, qui envoient des signaux pour révéler la qualité des biens : prix plus élevés, labels, marques, garanties... Cette situation révèle une nouvelle dimension du rapport marchand, où les relations stratégiques prennent toute leur importance. L'individu a besoin de l'autre pour le guider dans sa recherche.

La seconde situation correspond à une remise en cause de l'hypothèse d'exogénéité des préférences. Dans la théorie orthodoxe, les préférences individuelles sont supposées strictement séparées [9], ce que réfute non seulement la théorie institutionnaliste, mais également l'économie expérimentale.

Ce double écueil est connu depuis longtemps mais dans quelles mesures remet il véritablement en cause la TEG ? À vrai dire, les critiques adressées à la TEG ont

9. Mais néanmoins suffisamment diverses : des préférences identiques rendent impossibles tout échange. Cette contrainte est prise en compte par l'hypothèse de convexité des préférences, qui traduit le goût pour la diversité des paniers de consommation. D'où une première tension dans la théorie néoclassique de la valeur d'ailleurs : les individus sont supposés séparés, mais pas trop pour préserver l'institution marchande.

souvent tendance à mêler une critique du mécanisme de marché avec une critique plus sociologique ou philosophique, relative à la séparation marchande. Il est incontestable que les caractères économique et philosophique sont couplés chez Walras, puisque le mécanisme de marché est présenté comme le moyen de préserver la liberté individuelle, i.e. la séparation. Rappelons que la grande idée de Walras était de montrer que, même dans les situations les plus égoïstes, les décisions des agents économiques ne conduisent pas au chaos social. La pensée de Walras porte encore le sceau du mythe fondateur de la pensée libérale : l'idée fondamentale que la poursuite de l'intérêt individuel est source d'ordre. Mais si l'on s'autorise à se départir de l'arrière-plan philosophique du modèle walrassien [10], il devient possible de détacher la théorie de la rareté du mécanisme de marché, pour analyser chacun d'entre eux, *per se*, plus finement.

Dans cette perspective, le mécanisme de marché walrassien s'avère assurément critiquable et nous pensons avoir partiellement traité la question dans la section précédente. On en vient donc à la théorie de la rareté, dont la remise en cause cache, comme nous allons le voir, des subtilités inattendues. La question est de savoir si la TEG (entendue dorénavant comme théorie d'un équilibre général possible par les prix) est compatible avec le relâchement — pour les raisons (nombreuses) que l'on voudra — de l'hypothèse de stricte séparation marchande.

Pour les tenants de la thèse walrassienne, la réponse est oui. Si on entend « économie pure » par « approximation du réel » (c'est-à-dire, disons, une interprétation plus parétienne que walrassienne), le relâchement de l'hypothèse de séparation n'est rien d'autre que la réciproque de l'évacuation des motivations individuelles. Selon cette approche, l'hypothèse de séparation marchande n'est qu'une simplification utile qui renvoie la médiation sociale à des frictions méthodologiquement insignifiantes. La prise en compte de ces frictions ne conduirait qu'à une extension inutilement complexe du modèle canonique de Walras-Arrow-Debreu, en aucun cas à sa destruction.

De leur côté, les détracteurs de la thèse walrassienne voient dans le rejet de l'hypothèse de séparation marchande une remise en cause plus radicale de la TEG, car plus philosophique, ou anthropologique, que technique. La prise en compte des sentiments humains ne peut conduire qu'au rejet fondamental de la posture néoclassique essentialiste, qui donne à voir des individus totalement spécifiés. Une relation marchande qui n'est pas totalement intermédiée par le marché peut potentiellement annihiler le rôle stabilisateur de la concurrence. Les comportements mimétiques contrarient en effet la relation négative entre le prix et la demande, ce qui peut bloquer les forces de rappel vers le prix d'équilibre.

Ces effets déstabilisateurs remettent-ils pour autant en cause l'hypothèse d'équilibre général ? L'unicité et la stabilité de l'équilibre certainement ; mais pourquoi remettraient-ils cette hypothèse en cause dans son existence ? Après tout, même dans le cadre néoclassique le plus standard, la stabilité n'est pas assurée avec certitude. La TEG est-elle rejetée pour autant ? N'est-elle pas simplement comme les fondateurs la voyaient depuis Pareto [11] : une approximation du réel ? La théorie néoclassique a des arguments à faire valoir dans ce sens. A son crédit, il faut noter que les modèles néo-walrassiens contemporains n'ont aucun mal à montrer le caractère inoffensif de certaines propriétés relatives aux interdépendances individuelles : l'ajout de l'utilité

10. Rappelons que Pareto était déjà profondément agacé par le mélange de théorie pure et de philosophie sociale de Walras.

11. Pour Walras, la réalité était davantage une version imparfaite de l'équilibre général. L'équilibre général représentait pour lui plutôt le devenir de la réalité.

d'autrui dans les préférences individuelles laisse, par exemple, parfaitement intègre la TEG.

Pour la théorie hétérodoxe (disons la socio-économie), l'argument est cependant trop léger, car ce que provoque l'interdépendance des préférences, c'est une circularité beaucoup plus épineuse entre les préférences des individus et la rareté des choses. Pour elle, la remise en cause de l'objectivité des préférences doit inévitablement conduire au rejet *de principe* du modèle walrassien, et ce faisant à une nouvelle théorie de la valeur. Le problème, c'est qu'aucun modèle n'éclaire réellement cette théorie à ce jour.

Ce flou nous laisse finalement dans l'inconfort d'avoir à choisir entre deux postures semblant relever de deux niveaux d'explication incompatibles et inachevés. D'un côté, la théorie néoclassique nous offre ce privilège de pouvoir raisonner dans un cadre bien défini et bien compris, mais un cadre malheureusement trop étriqué (en dépit de son étonnante plasticité) pour prétendre rendre compte de la médiation marchande sociale. De l'autre, le courant institutionnaliste hétérodoxe rend toute sa justice à cette médiation sociale mais a toujours cette tendance à nous apparaître comme une thèse informe (voire fumeuse), incapable de s'incarner dans une modélisation formelle concrète.

À ce stade, sans grande surprise, on sent une certaine démotivation à l'idée d'imaginer un cadre de réflexion oeucuménique. Toute tentative de synthèse parait vaine. Pourtant, il existe des arguments, encore largement inexplorés, qui permettent à la fois d'élargir et de raffiner la représentation néoclassique de la valeur. Que devient l'équilibre walrassien si la médiation sociale (décentralisée) s'invite au côté de la médiation centralisée ? Telle est la question fondamentale qu'il convient de ré-examiner, dans toutes ses dimensions.

4.3.2 Médiation interne et médiation externe

Dans la représentation walrassienne, la demande x_{ij} d'un individu i pour le bien j est fonction du vecteur de prix p des biens (comprenant le prix de location des services du travail, i.e. les salaires), des profits distribués et des dotations individuelles initiales ω_i. Puisque les profits dépendent eux-mêmes des prix et que les dotations individuelles sont exogènes (i.e. paramétriques), les fonctions de demande individuelle peuvent s'écrire, en toute généralité, $x_{ij} = f_{ij,\omega_i}(p)$ [12]. La fonction de demande agrégée pour le bien j peut alors s'écrire $x_j = f_{j,\omega}(p)$. En supposant que l'offre agrégée dépend elle aussi des prix, on détermine finalement la fonction de demande excédentaire pour le bien j : $z_j = h(p)$ (ou $z_j \in h(p)$ dans le cas multivalué).

Tout le problème tourne alors autour du concept d'*économie régulière* ; il s'agit de caractériser une fonction de demande excédentaire dont la pente est non-nulle à proximité des prix d'équilibre, c'est-à-dire à proximité des points $(p^*, 0)$ (tels que $z = h(p^*) = 0$). Cette condition est synonyme d'unicité locale de l'équilibre. Dans le cadre de la théorie walrassienne, on sait qu'une économie est régulière si les fonctions de demande sont continûment différentiables. Il s'agit donc d'identifier les classes de relations de préférence qui exhibent cette propriété, que Debreu [37] identifie comme des « préférences lisses ».

Mais que se passe-t-il maintenant lorsqu'on ajoute une médiation sociale ? Deux cas sont à considérer, suivant que la relation aux autres s'incarne dans un voisinage

12. Si on relâche l'hypothèse de convexité forte sur les préférences, la fonction de demande prend une forme multivaluée (appelée correspondance de demande). Dans ce cas on a $x_i \in f_{ij,\omega_i}(p)$.

social concret ou plus simplement dans une norme sociale n'impliquant aucune interaction individuelle. Cette distinction recouvre exactement ce qu'Orléan [138] appelle « médiation interne » et « médiation externe » dans l'*Empire de la valeur*. Dans la configuration d'une médiation interne, il convient d'ajouter directement la consommation d'autrui comme argument des demandes individuelles (on parle aussi d'*externalités d'adoption* ou d'*externalités de réseau* microéconomiques). Nous avons à considérer des fonctions de demande de la forme $x_{ij} = f_{ij,\omega_i}(p, x_{-i})$, où $-i := \mathbb{I}\backslash i$. La fonction de demande agrégée du bien j peut alors s'écrire $x_j = f_{j,\omega}(p, X)$, où $X := (x_{ij})_{i\in\mathbb{I},j\in\mathbb{J}}$ est la matrice des demandes individuelles, et la fonction de demande excédentaire $z_j = h_j(p, X)$. La condition d'équilibre s'écrit maintenant $h_j(p^*, X) = 0,\ \forall j \in \mathbb{J}$, ou si l'on préfère $h(p^*, X) = \mathbf{0}$.

A contrario, dans la configuration d'une médiation externe, la relation aux autres est si distendue qu'elle s'exerce en dehors de toute interaction avec un voisinage concret. Dans ce cas, l'individu prend pour référence une norme sociale, qui est une forme d'externalité macroéconomique. Pour simplifier, ce sont ici les demandes agrégées $x := (x_j)_{j\in\mathbb{J}}$ que nous conviendrons d'ajouter comme arguments des demandes individuelles. Nous avons alors à considérer maintenant des fonctions de demande de la forme $x_{ij} = f_{ij,\omega_i}(p, x)$ [13], ainsi qu'une fonction de demande agrégée $x_j = f_{j,\omega}(p, x)$, et une fonction de demande excédentaire $z_j = h_j(p, x)$. La condition d'équilibre s'écrit maintenant $h(p^*, x) = \mathbf{0}$.

Dans les deux cas, il est tentant de chercher si l'équation $h(p, X) = \mathbf{0}$ (resp. $h(p, x) = \mathbf{0}$) est en un sens équivalent à $p = \theta(X)$ ($p = \theta(x)$). Mais il est difficile de statuer sur une telle équivalence, qui définit h comme une fonction implicite, surtout globalement, car le système n'est pas supposé être nécessairement linéaire. Cette équivalence peut être seulement locale [14]. Selon nous, l'erreur serait de vouloir déterminer l'existence d'un équilibre à partir de la topologie (ou de la topologie différentielle) sous-jacente, en dressant une liste de conditions permettant d'appliquer à tout prix un théorème d'inversion locale. Cette méthode procède, selon nous, d'une mauvaise axiomatique pouvant conduire à des conditions contre-nature, telles que des fonctions continues ou lipschitziennes. Le problème n'est pas, nous semble-t-il, de savoir quelles propriétés doivent conditionner les fonctions pour caractériser une solution (un point fixe), mais de *construire* l'idée même d'équilibre général, à partir d'une algèbre sociale qui lui convient. Cette algèbre sociale ne comprend pas seulement les prix ou la « technologie » des préférences individuelles (ou encore celle de la production dans les modèles de production), elle contient en outre tout le tissu des interdépendances individuelles, côté consommation comme côté production. Mais surtout, ce sont les propriétés holistiques de cette algèbre sociale qui importent, et non les propriétés considérées séparément. C'est précisément cette séparation des conditions d'existence qui, selon nous, pose problème dans l'approche axiomatique néo-walrassienne. Penser qu'on peut identifier des propriétés en isolation pour établir l'équilibre général, c'est déjà trahir la médiation sociale, et manquer la nature organique du système économique et social. Les conditions de possibilité de l'équilibre peuvent être autre chose qu'un empilement de briques axiomatiques (comme chez Debreu [36]) ; elles peuvent s'incarner dans des fonctions multivoques

13. Nous avons dans ce cas des externalités de réseau à la fois directes (x_{ij} dépend de x_j) et indirectes (x_{ij} dépend de x_{-j}).

14. Comme dans l'exemple du cercle unité : il est possible d'identifier $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ à la fonction $y = (1 - x^2)^{1/2}$ ou à la fonction $y = -(1 - x^2)^{1/2}$ suivant le signe de y. Aux points $y = 0$, il n'est même plus possible d'identifier une fonction implicite, car f ne définit pas un graphe.

(des correspondances) qui, recollées, décrivent l'alchimie sociale d'où émerge un équilibre.

On pourra objecter que de telles conditions de possibilité sont sans intérêt puisqu'elles concernent des données inaccessibles. Nous répondrons simplement que la démarche n'est pas sensiblement différente de l'approche axiomatique néo-classique, l'objectif n'étant pas de fournir un guide de politique économique, mais une intelligence de l'ordre social. Mais il reste à expliciter davantage ce que recouvre cette TEG d'un nouveau genre.

4.3.3 La dualité espace de la valeur / algèbre sociale

Soient respectivement ϕ et ψ une fonction de demande et une fonction d'offre telles que $x = \phi(p)$ et $y = \psi(p)$. On en déduit une fonction de demande excédentaire $z = x - y = \varphi(p)$, qui définit le graphe $G_\varphi = \{(p, \varphi(p)) | p \in E\}$, lequel donne une caractérisation spatiale du problème de l'équilibre général. Dans le cas le plus général, le théorème du point fixe de Kakutani nous permet de déterminer les conditions d'existence d'un équilibre général. Mais, depuis les résultats mathématiques fondamentaux de Gelfand, on sait que le point de vue géométrique peut être couplé à un point de vue algébrique. Au lieu de se focaliser sur le graphe G_φ et son point fixe, on peut chercher à le « reconstruire » point par point, en considérant l'évaluation de φ en chaque point.

Lorsqu'on se donne un espace X, dont les éléments sont les points, on sait construire l'algèbre $\mathcal{A}$ des fonctions sur X à valeurs réelles ou complexes, grâce au théorème de Riesz. Cette algèbre est commutative car on a $(ab)(x) = a(x)b(x) = b(x)a(x) = (ba)(x)$. Lorsque notre espace X est équipé d'une structure topologique, on sait construire l'algèbre $C^0(X)$ des fonctions continues et lorsque X est équipé d'une structure différentiable, on sait construire l'algèbre $C^\infty(X)$ des fonctions différentiables.

Réciproquement, Gelfand inverse cette opération (*cf. supra* chap. 2). En partant d'une algèbre commutative abstraite (une algèbre stellaire), il est possible de lui associer un espace topologique compact X, construit à partir de son spectre $Spec(\mathcal{A})$ (i.e. l'ensemble de ses caractères). Pour chaque $a \in \mathcal{A}$, Gelfand associe une application $\mathcal{G}_\mathcal{A} : \mathcal{A} \to C(Spec(\mathcal{A}))$, appelée *transformée de Gelfand* de a, et définie par $a \mapsto (\chi \mapsto \chi(a))$. Par convention, on note en général $\hat{a} := \mathcal{G}_\mathcal{A}(a)$, ce qui permet d'écrire plus simplement $\hat{a}(x) = x(a)$. $\hat{a}$ apparait ainsi comme l'évaluation de x au point a ; les points vérifiant cette formule correspondent très précisément aux caractères $x \in Spec(\mathcal{A})$.

Le résultat fondamental de Gelfand est que les deux points de vue sont inverses l'un de l'autre : la transformation de Gelfand établit un isomorphisme isométrique entre le point de vue géométrique et le point de vue algébrique. Ce résultat peut donc aussi s'interpréter à partir du point de vue géométrique. Si on dote $Spec(\mathcal{A})$ de la plus faible topologie pour laquelle toutes les fonctions $\hat{a} : Spec(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ sont continues[15], on obtient cette propriété universelle qu'une fonction $f : X \to Spec(\mathcal{A})$ est continue si et seulement si la composée $\hat{a} \circ f : X \to \mathbb{C}$ est continue. On peut alors montrer que l'application $X \to Spec(\mathbb{C}(X))$, qui à tout point x d'un espace

15. Cette topologie faible sur $Spec(\mathcal{A})$ est appelée *topologie de Gelfand*, tandis que l'espace $Spec(\mathcal{A})$ équipé de la topologie de Gelfand est appelé *espace de Gelfand* de $\mathcal{A}$ ou espace idéal maximal.

de Hausdorff compact X associe le caractère ϵ_x sur $\mathbb{C}$, tel que $\epsilon_x(f) = f(x)$, est un homéomorphisme.

En termes catégoriques, la transformation de Gelfand définit un foncteur contravariant allant de la catégorie dont les objets sont les algèbres stellaires commutatives et les morphismes les $*-$homomorphismes — appelons-là Stell_{com} — et la catégorie dont les objets sont les espaces de Hausdorff compacts et les morphismes les fonctions continues — appelons-là CompH. Réciproquement, l'évaluation ϵ_x en x définit un foncteur, également contravariant, allant de CompH vers Stell_{com}. Ce que dit en substance le théorème de Gelfand, c'est que les catégories CompH et Stell_{com} sont équivalentes ; les données géométriques sont interchangeables avec les données fonctionnelles.

Dans le cas qui nous occupe, l'espace de la valeur X est composé de l'ensemble des points $x^* := (p^*, q^*) \in \mathbf{R}^{2J}$, et l'algèbre sociale qui décrit précisément l'opération de recollement est l'algèbre des matrices dont les entrées retrouvent par recollement les couples de points (p^*, q^*). On comprend alors comment on peut récupérer (l'espace de) la valeur à partir de l'algèbre sociale. Un équilibre prix-quantité $x^* := (p^*, q^*) \in \mathbf{R}^{2J}$ correspond ni plus ni moins à un caractère ϵ_{x^*} tel que $f(x^*) = \epsilon_{x^*}(f)$, où $f \in \mathcal{A}$ est une matrice de l'algèbre sociale.

La situation devient plus intuitive une fois exprimée dans le langage des catégories. Désignons EspVal la catégorie de (l'espace de) la valeur, dont les objets sont les équilibres, c'est-à-dire les couples (prix, quantité) d'équilibre, et dont les morphismes sont les modifications de l'équilibre, et AlgSoc la catégorie dont les objets sont les algèbres sociales (caractérisant les fonctions comportementales des agents économiques), et les morphismes les changements de comportement des agents économiques. Nous avons alors un premier diagramme de naturalité entre la catégorie EspVal et la catégorie AlgSoc^{op} :

$$\begin{tikzcd} x^* \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, "\epsilon"'] & y^* \arrow[d, "\epsilon"] \\ \epsilon_{x^*}(x^*) \arrow[r, mapsto, "\epsilon(f)"'] & \epsilon_{y^*}(y^*) \end{tikzcd}$$

FIGURE 4.1 – De la valeur économique à l'algèbre sociale

Ce diagramme exhibe le caractère ϵ comme un foncteur contravariant. En effet si $g : y \mapsto z$ est un autre morphisme de valeur, alors $\epsilon(g \circ f) = \epsilon f \circ \epsilon g$. Nous avons un second foncteur contravariant caractérisant l'évaluation $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$, entre la catégorie AlgSoc et la catégorie EspVal^{op}, :

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto, "\phi"] \arrow[d, "\mathcal{G}"'] & b \arrow[d, "\mathcal{G}"] \\
\mathcal{G}_{\mathcal{A}}(a) \arrow[r, mapsto, "\mathcal{G}_{\mathcal{A}}(\phi)"'] & \mathcal{G}_{\mathcal{B}}(b)
\end{tikzcd}$$

FIGURE 4.2 – De l'algèbre sociale à la valeur économique

On en déduit finalement une adjonction entre l'espace de la valeur et l'algèbre sociale :

$$\mathscr{EspVal} \leftrightarrows \mathscr{AlgSoc}^{\mathrm{op}}.$$

Cette adjonction prend la forme d'une dualité d'Isbell, comme nous l'avons vue dans le chapitre 2.

4.3.4 La théorie de la valeur est une théorie du recollement

À ce stade, on peut se demander pourquoi exposer ces détails de mathématicien, puisque, en vertu de cette propriété d'interchangeabilité (i.e. l'isomorphisme isométrique), le point de vue géométrique auquel est habitué le néo-walrassien suffirait à traiter notre problème. C'est cependant oublier que l'équivalence des points de vue a ses conditions. Or ici intervient la savoureuse indocilité de la théorie de la valeur, avec sa médiation sociale. En réalité, l'équivalence des points de vue prévaut pour des algèbres commutatives involutives. Il se trouve que la condition d'involutivité résiste bien à l'hypothèse de médiation sociale. Considérons un opérateur de connexion linéaire opérant sur la matrice de consommation X (médiation interne) ou sur le vecteur de consommation x (médiation externe). Appelons cet opérateur T [16]. Ces opérateurs sont involutifs, c'est-à-dire qu'ils sont égaux à leur biadjoint : $(T^*)^* = T$. Cette propriété est assez intuitive. Si je transpose deux fois (dans le cas réel) la structure de connexion des individus, je ne change rien à cette structure : les lignes traduisant les dépendances sortantes des individus deviennent des lignes traduisant ses dépendances entrantes, pour redevenir des lignes traduisant ses dépendances sortantes.

L'hypothèse de commutativité apparait en revanche comme hautement improbable en présence de médiation sociale. Imaginons une décomposition de la structure de connexion des individus entre deux opérateurs T_1 et T_2. Il n'est pas vrai que $T_1T_2 = T_2T_1$. Est-ce dire que la transformation de Gelfand perd toute son importance ? Non, mais l'isomorphisme laisse place à un simple homomorphisme beaucoup plus lâche (faisant décroître la norme). L'idée est alors de faire « comme si » : partant d'une algèbre (une C^*-algèbre non commutative), on lui associe quand même un « pseudo-spectre ». Assurément, ce spectre ne peut pas être un espace topologique et il faut redéfinir la notion de caractère pour l'algèbre associée [17]. C'est tout le sens de la « géométrie non commutative ».

16. Car il s'agit d'un tenseur $T^{(2,1)}$ pour la médiation interne et d'un tenseur $T^{(1,1)}$ (une matrice) pour la médiation externe.

17. Dans notre cas, le spectre d'une algèbre de tenseur $\mathcal{A}$ pourrait d'autant moins être un espace topologique qu'on ne peut pas injecter $\mathcal{A}$ dans $C(X)$.

Les espaces ne sont alors plus directement accessibles, ils ne le sont que par une *opération de recollement* non triviale, qui transmet la façon dont les individus interagissent, s'imitent, ou se différencient. Dans les cas les plus sauvages, il est possible que les espaces ne puissent plus être accessibles du tout. Les points peuvent se raréfier jusqu'à disparaitre totalement (on parle alors de « géométrie sans points »). La belle symétrie de Gelfand est alors brisée : l'opération qui consiste à partir de l'algèbre pour récupérer l'espace associé n'est plus inversible.

La conclusion, c'est qu'en présence de médiation sociale l'espace de la valeur ne peut se laisser déchiffrer que par le biais de l'algèbre sociale. En cela, *la théorie de la valeur est fondamentalement une théorie du recollement. L'espace de la valeur — le rapport aux choses — est un recollement de l'algèbre sociale — du rapport aux autres.* Bien que violemment non trivial, ce recollement est intelligible et s'exprime par les données fonctionnelles (l'algèbre sociale décrivant les actions et réactions comportementales des agents économiques), qui sont les données premières de l'équilibrage économique et sociale.

C'est en cela que la valeur est une authentique *construction sociale*, en tant que « spectre » d'une algèbre sociale. Sous cet angle, la théorie de la valeur consiste à comprendre comment s'opère le bricolage social, que traduisent les structures de connexion entre les agents économiques. Lorsque cette structure est réduite à sa plus simple expression, lorsque l'économie est dépourvue de médiation sociale, la théorie de la valeur devient en un sens triviale, dégénérée.

De Simmel à Keynes, les théories hétérodoxes relevant de la socioéconomie offrent depuis longtemps des analyses stimulantes pour penser la théorie du marché autrement. Mais elles ont toujours été dépourvues d'une théorie de la valeur bien définie. Cette contribution propose un cadre théorique et méthodologique rigoureux allant dans ce sens. En outre, elle propose un cadre *généralisant* la théorie néoclassique de la valeur. Dans la théorie néoclassique, la rareté est objective, car elle reflète *objectivement* les préférences des agents (lesquelles sont séparées). Dans les théories classique et marxiste, la rareté est également objective, car elle reflète *objectivement* les rapports de production (différemment chez Smith, Ricardo, Marx). Ici, la rareté n'est pas objective, pas plus que subjective. Elle est transcendantale, car elle dépend des conditions du recollement de l'espace de la valeur. La problématique de la rareté commence par se construire dans les croyances partagées, les comportements mimétiques, les phénomènes de différenciation, tant du côté offre que du côté demande, continuent de s'échafauder dans le rapport salarial et les conditions monétaires de l'économie, et finissent de se déterminer dans la réalité de l'échange marchand monétaire (*cf. supra*, le problème de coordination monétaire). Le modèle walrassien exhibe un prix-sanction : la valeur préexiste au prix, le modèle a pour objectif de l'*évaluer*, comme l'indicateur de pH qui évalue l'acidité d'une solution déjà préparée. Dans le modèle considéré ici, la valeur est à construire, institutionnnellement.

4.4 $\mathfrak{P}_3$

Nous allons maintenant donner la clé de lecture des longs développements que nous avons accordés à la TEG. Cette clé de lecture a déjà été débattue en introduction, mais il s'agit maintenant de l'expliciter en économie. On est en droit de penser que les outils mathématiques mobilisés ici sont fort compliqués, pour une science économique déjà bien phagocytée par les mathématiques. Pourtant, en dépit des apparences, c'est bien une clarification qu'apportent les algèbres d'opérateurs. Nous sommes convaincus que les choses deviennent beaucoup plus simples lorsqu'on accepte l'idée que l'économie est une affaire de représentation opératorielle (ce qui ne veut pas dire que c'est intellectuellement plus aisé). Les algèbres d'opérateurs sont assurément ardues, mais elles simplifient, selon nous, la représentation de l'équilibre économique. Tout se passe en réalité comme si on échangeait un perfectionnement dans la résolution du problème par une amélioration du problème lui-même, une meilleure problématisation [18]. À force de sophistiquer le modèle walrassien, avec une ténacité rare, disposant et redisposant inlassablement les mêmes arguments, les économistes se sont enlisés et ont fini par perdre de vue le problème fondateur.

4.4.1 Un approfondissement de la TEG

Ce chapitre a présenté successivement deux révisions de la TEG. La première s'attaque à la TEG comme mécanisme de marché. Son ambition est de joindre à la vision walrassienne de l'équilibre général la vision smithienne du mécanisme de marché et la vision wicksello-keynésienne de la régulation monétaire. Il s'agit d'une première synthèse axée sur le fonctionnement même du marché. Le seconde révision de la TEG s'est, pour sa part, focalisée sur la base socio-anthropologique du modèle, en invitant l'éternel mal-aimé de l'économi(sm)e néoclassique : la médiation sociale. Son ambition est de conjuguer la théorie de l'équilibre général avec la socio-économie.

Bien qu'étrangères l'une à l'autre, ces deux révisions généralisantes partagent un point méthodologique commun : les algèbres d'opérateurs. Dans la première révision, le problème de l'équilibre général est redéfini comme un problème de « fonction fixe » (et non comme un problème de point fixe) ; il ne s'agit pas de trouver le prix qui solde le marché, mais le régime de régulation monétaire qui épuise à la fois les quantités portées aux marchés pour y être vendues (aux prix attendus) et les liquidités apportées pour y être dépensées (afin d'obtenir les quantité attendues). Le contrôle n'opère pas sur une variable, mais sur des fonctions à définir.

Méthodologiquement et mathématiquement, la seconde révision va plus plus loin. Économiquement, elle part du constat que la théorie walrassienne ne traite qu'un cas particulier très réducteur de l'économie : une économie dépourvue de médiation sociale. Les fondateurs de l'école néoclassique (Pareto plus encore que Walras peut-être) ont pensé qu'il s'agissait d'une simplification utile. Ils ont pensé que le tissage social pouvait être comme « effacé », pourvu qu'il laisse sa trace sur les fonctions d'offre et de demande [19]. C'est selon nous une lourde erreur méthodologique, si l'on souhaite capturer avec finesse le processus d'équilibrage économique. La « trace » de la médiation sociale, c'est la médiation sociale elle-même. Ce que l'on demande à l'économie, c'est de dégager les structures algébriques des relations entre les individus et les choses, pour permettre la mesure et la quantification (selon la dualité géométrie-algèbre). Ce que doit évacuer l'économiste de son champ de vision, ce sont les motivations psychologiques et sociologiques des rapports entre les individus et les choses, non les rapports eux-mêmes ! Évacuer lesdits rapports ne définit pas une méthodologie économique réellement satisfaisante, mais une pétition de principe lourde de conséquence. L'économiste *doit* donc considérer la trace de la médiation

18. Les vrais grands problèmes, disait Bergson, ne sont posés que lorsqu'ils sont résolus.
19. On rappelle le bon mot de Pareto : « l'individu peut disparaître pourvu qu'il nous laisse cette photographie de ses goûts », [140], p. 170.

sociale, sans quoi son travail ne pourrait jamais faire corps avec celui du sociologue et du psychologue (le travail de ces derniers commençant là où s'arrête le sien).

Mais si on ajoute une structure d'interdépendances entre les agents économiques, le problème de l'équilibre général change viscéralement de nature. C'est le point essentiel : *la demande agrégée ne peut plus être explicite, ce qui donne à la relation prix-quantité une tournure circulaire.* Il est impossible d'avoir accès à l'espace de la valeur sans connaitre l'opération de recollement qui préside à sa construction. Le tissage social est irréductible.

Les deux généralisations partagent fondamentalement la même démarche, et on saisit l'intérêt d'une synthèse combinant l'approfondissement du mécanisme de marché, pour fournir une explication monétaire de la loi de l'offre et de la demande, et l'approfondissement de la théorie de la rareté, pour fournir une explication socioéconomique de la valeur.

La clé de lecture de la théorie défendue ici réside dans une réinterprétation du triptyque observables / mode d'équilibration / contrôle [20]. De façon très générale, la représentation d'une économie à l'équilibre peut être décrite comme l'adéquation d'observables dans un système donné, grâce à un opérateur de contrôle. Nous avons affaire à trois paradigmes d'équilibre (Tableau 4.2). Le premier, $\mathfrak{P}_1$, met en adéquation les entrées et les sorties économiques au sein d'un décompte (la comptabilité nationale ou tout autre système de comptabilité). Cette représentation s'apparente à un *objet concret* au sens décrit en introduction : c'est une représentation purement statique, afonctionnelle ou « ponctuelle ». Appartiennent à ce paradigme les différentes générations de TES (Quesnay, Marx, Leontief...).

Le deuxième, $\mathfrak{P}_2$, met en adéquation l'offre et la demande agrégées dans un modèle comportemental, grâce à un tâtonnement. Appartiennent à ce paradigme les différentes générations de TEG (Walras, Pareto, Arrow-Debreu). Par rapport $\mathfrak{P}_1$, on passe à une représentation dynamique et fonctionnelle de l'équilibrage : ce sont les *fonctions* d'offre et de demande qui sont utilisées dans le tâtonnement des prix. Le passage de $\mathfrak{P}_1$ à $\mathfrak{P}_2$ est représentatif d'une première forme d'abstraction, d'ordre matériel, qui relève du mode d'individuation de l'observable : l'équilibre est désormais *individué* au sein d'un processus de détermination (le tâtonnement). Comme l'avait vu Samuelson [157], le TES représente en effet un cas particulier de TEG, puisqu'il s'agit d'une représentation à prix fixe. Nous avons donc $\mathfrak{P}_1 \in \mathfrak{P}_2$.

	les observables ...	... s'équilibrent dans	... via l'ajustement
$\mathfrak{P}_1$	les entrées et les sorties	la comptabilité	aucun
$\mathfrak{P}_2$	l'offre et la demande	un tâtonnement	de variables (prix)
$\mathfrak{P}_3$	l'offre et la demande attendues	un recollement	de fonctions

TABLE 4.2 – Trois paradigmes d'équilibre

Le troisième paradigme d'équilibre, $\mathfrak{P}_3$, met en adéquation l'offre et la demande agrégées attendues, soit via la règle de Cantillon-Smith, grâce à l'ajustement des prix ou à celui des liquidités accordées par les banques (dans la version smitho-wicksellienne), soit via la médiation sociale, grâce à la structure de connexion des agents économiques (dans la version socioéconomique). Par rapport $\mathfrak{P}_2$, on passe à une

20. On remarquera un parallèle frappant avec l'article de synthèse de Tronçon [182]. La comparaison avec la logique donne une preuve supplémentaire de la vocation transdisciplinaire des ruptures paradigmatiques dont ce volume fait l'objet.

représentation opératorielle de l'équilibration : l'équilibrage opère ici sur des fonctions. Le passage de $\mathfrak{P}_2$ à $\mathfrak{P}_3$ est représentatif d'une seconde forme d'abstraction, d'ordre formel (*cf. supra* introduction), qui relève du mode de représentation de l'observable : le modèle d'équilibre n'est pas plus général du point de vue de l'observable (l'équilibre), mais du point de vue du mode d'équilibrage. C'est pourquoi nous avons naturellement $\mathfrak{P}_2 \in \mathfrak{P}_3$, et c'est également pourquoi nous conviendrons d'appeler $\mathfrak{P}_3$ « théorie générale de l'équilibration » (TGE), par opposition à la théorie de l'équilibre général (TEG) qui vit dans le paradigme $\mathfrak{P}_2$.

4.4.2 De l'équilibre à l'équilibration

Nous avons proposé de nommer TGE (théorie générale de l'équilibration) — par contraste avec la théorie de l'équilibre général — les classes de modèles appartenant à $\mathfrak{P}_3$. Il nous faut donc justifier le terme d'équilibration et le déplacement du terme « général ».

Ce que le paradigme $\mathfrak{P}_3$ apporte, ce n'est pas seulement l'idée que l'équilibre est général, mais l'idée que c'est tout le processus d'équilibrage qui est général. C'est dans ce sens que l'on est autorisé à parler d'*équilibration*, en assumant sans réserve l'analogie avec la biologie. Selon le dictionnaire Larousse, l'équilibration est la « fonction qui assure aux animaux et à l'homme la maîtrise de leur équilibre ». Transposée à l'économie, cette définition convient parfaitement à $\mathfrak{P}_3$: l'équilibration macroéconomique est la fonction qui assure aux marchés la réalisation de leur équilibre. Alors que l'équilibre est un *état*, l'équilibration décrit le *processus* qui mène à l'état d'équilibre, puis à son maintien. C'est l'agencement des mécanismes de coordination qui assure le maintien du système dans son état d'équilibre. La TEG est donc bien, de ce point de vue, aussi une TGE, mais une TGE dans laquelle le processus d'équilibration se limite à un simple mécanisme : le tâtonnement (le vecteur de prix étant supposé résumer toute l'information nécessaire aux décisions microéconomiques). Dans sa version opératorielle, l'équilibration prend une autre ampleur, où il est d'abord question de construire l'espace de l'équilibration : l'espace de la valeur (révision socioéconomique de la TEG) et l'espace de régulation monétaire (révision smitho-wickellienne). La TGE offre ainsi une vision *constructiviste* de l'équilibre, dans le sens où l'instrument de l'équilibrage n'est pas *déjà-là*, il est à inventer. On vérifie donc qu'il s'agit d'une généralisation de la TEG.

Il faut absolument éviter toute confusion avec la *Théorie générale* de Keynes [104]. La théorie de Keynes est « générale » parce qu'elle autorise les déséquilibres. La *Théorie générale* ne propose pas une généralisation de la TEG (puisqu'on en sort), mais une généralisation de la représentation générale de l'économie qui, dans le cadre walrassien, conduit à la TEG. Du point de vue de l'équilibre proprement dit, la théorie de Keynes est donc davantage un affaiblissement qu'une généralisation. En un sens, la théorie keynésienne est d'ailleurs inachevée, car elle reste implicitement dépositaire de l'équilibre général walrassien. Il y a incontestablement chez Keynes une tension entre la *Théorie générale*, qui ne prévaut que grâce au maintien du cadre néoclassique, et la théorie de la valeur qui implicitement rejète ce cadre. On ne peut raisonnablement pas à la fois généraliser une théorie et en rejeter les fondements (de façon plus ou moins avouable). Mais Keynes n'avait probablement pas les outils méthodologiques (ni peut-être la motivation) pour viser une révision de la théorie de la valeur.

Au contraire de Keynes, ce chapitre défend implicitement la TEG, en cherchant à la surplomber. Plus précisément elle défend l'idée que de bons modèles théoriques restent à inventer. Ces modèles théoriques de nouvelle génération, que ce chapitre appelle de ses voeux, se rassemblent sous le paradigme enveloppant de la TGE. Nous en avons donné deux illustrations, l'une détaillée (le modèle smitho-wicksellien), l'autre semi-détaillée (l'esquisse socioéconomique avec médiation interne). Le travail d'investigation est considérable pour explorer les puissances de la TGE.

4.4.3 Une relecture existentialiste de l'axiomatique

Finalement, non seulement la vision de la TGE préserve l'approche axiomatique, mais elle la renforce en lui donnant un sens social. En disséquant de plus en plus chirurgicalement la TEG, les théoriciens de l'équilibre général ont progressivement dégagé la dualité de la théorie, qui oscille entre une représentation topologique des comportements économiques — les concepts topologiques sont légions dans les théories du consommateur et du producteur — et une représentation algébrique des dynamiques économiques. Cette prise de conscience est incontestablement un progrès dans notre façon d'appréhender la théorie économique. Elle a permis d'exposer au grand jour la nature axiomatique de la TEG (et au delà des problèmes économiques dans leur ensemble), rendant ainsi la recherche plus profonde et plus féconde.

La contribution de Debreu est à cet égard exemplaire. On ne saurait mieux dire que Debreu quand celui ci déclarait [21] : « L'axiomatisation facilite la détection des erreurs logiques contenues dans le modèle, et, ce qui est peut-être plus important encore, permet la détection des erreurs conceptuelles dans la formulation de la théorie et dans son interprétation ». Si la *Théorie de la valeur* [36] de Debreu a cette vertu rare de pouvoir être comprise comme un « crash-test » [22], il faut néanmoins rester lucide sur la portée de ce test. Oui, lorsqu'il s'agit de tester la cohérence logique et conceptuelle d'un modèle économique, les mathématiques viennent en premier, mais lesquelles ? Doit-on privilégier les hypothèses géométriques ou les hypothèses algébriques ? N'est-ce pas l'économie réelle, avec ses problématiques monétaires et sociales, qui doit trancher *in fine* ?

En économie, l'axiomatisation a souvent favorisé la topologie, surtout avec Debreu qui n'a jamais trahi son allégeance au bourbakisme. Sa *Théorie de la valeur* en est le parangon, avec son catalogue de conditions sur les ensembles de production, les ensembles de consommation, et sur les préférences. Il s'agit donc d'une axiomatique *adaptée à la topologie*, dont l'ontologie est essentiellement géométricienne.

Notre idée est de radicaliser cette approche, en proposant d'étendre l'examen des conditions individuelles à celui des conditions sociales. Selon nous, cette stratégie est par définition incontournable lorsqu'une médiation sociale entre en jeu, car une symétrie est brisée. Les algèbres (sociales) non commutatives ne sont plus associées à des espaces topologiques, mais à des fragments d'espaces éclatés, que seule une autre axiomatique (algébrique), permet de recoller pour leur donner un sens. *En pareille situation, la question n'est pas tant de déterminer l'équilibre (comme point fixe) mais de déterminer si l'idée même de point est appropriée, c'est-à-dire si (l'espace de) la valeur est définie.* C'est une interrogation d'une toute autre ampleur, qui est la conséquence de la promotion de la médiation sociale : en gardant la trace du

21. Lors de son allocution sur « l'axiomatisation de la théorie économique », à l'occasion de la remise de son Doctorat Honoris Causa de la Rheinische-Wilhelm-Universität de Bonn en 1977.

22. Vertu donnant au passage un autre sens à l'idée d'économie appliquée : le sens d'une séparation entre la structure logique et l'interprétation d'un modèle économique.

processus de recollement, on donne un sens existentialiste à la théorie de la valeur. En présence de médiation sociale, on ne peut plus faire l'économie d'un authentique calcul fonctionnel (opératoriel). L'axiomatique prend donc une nouvelle envergure.

Mais où chercher les conditions d'émergence d'un espace de la valeur ? Probablement dans la combinaison des préférences individuelles, des interactions sociales, des jeux stratégiques de marché, et des actions monétaires du secteur bancaire, bref, dans le *système* économique (institutionnalisé) dans son ensemble. Comme l'ont montré ces quelques réflexions, la force de la TGE, en tant que TEG généralisée, tient dans sa capacité à penser une large variété de régimes d'interactions dans un cadre théorique unifié. Dans ce cadre élargi, l'examen des conditions de possibilité de l'équilibre prend finalement une tournure existentialiste (plutôt qu'essentialiste), puisqu'on ne préjuge pas la valeur avant d'avoir examiné le cadre institutionnel et social de l'économie. Comme l'ont montré toutes les visions kantiennes, l'examen des conditions de possibilité d'un observable va toujours dans le sens de l'existentialisme, ou du dé-essentialisme.

4.5 Conclusion

L'économie néoclassique est fondamentalement une école qui « refuse l'obstacle social », et au demeurant l'obstacle monétaire. On sait pourquoi : la théorie walrassienne ne les a pas inscrits au programme. Le problème, c'est qu'elle s'est construit d'autres obstacles, plus artificiels, pour palier cette simplification (comme le problème du tâtonnement). Il en résulte une dichotomie forcée entre la théorie de la rareté, qui s'origine dans les préférences individuelles et la technologie de production, et la théorie du marché, idéalisée dans l'intervention d'un *deus ex machina*. La réalité est, sans doute, qu'une alchimie plus savante règle l'émergence de la valeur. Le mécanisme de marché a besoin des jeux d'interactions marchandes, sociales et monétaires, tout comme les « optimisations microéconomiques » ont besoin de se nourrir des structures institutionnelles. Cette dépendance du micro à l'égard du macro doit être soulignée, tant les fondements macroéconomiques de la microéconomie sont trop souvent laissés pour compte. De ce point de vue, la TGE est également compatible avec la thèse polanyienne, selon laquelle l'économie de marché est une construction socio-historique largement inspirée par les instances étatiques. Bien des comportements, dans les sphères marchandes, sont le fruit de politiques promues par l'Autorité.

Évidemment, cette vision ne va pas sans une certaine mise à jour de la boite à outils de l'économie mathématique. À ceux que cette mise à jour pourrait effrayer, on soulignera une fois de plus que cette vision ne perd rien de la vision néoclassique, en y ajoutant le compte-rendu que Péguy [143] publia en son temps dans la *Revue socialiste* au sujet des *Éléments* de Walras : « Il pourrait au contraire sembler à quelques uns qu'étant donnée cette complexité des phénomènes économiques, l'économie mathématique est justement beaucoup trop simple. Ceux-là n'auraient qu'à se rappeler que les premières propositions de la géométrie sont, elles aussi, très simples, sans que cette simplicité interdise en rien les complications ultérieures ».

Mais, si le paradigme $\mathfrak{P}_3$ n'enlève rien à la portée approximante du paradigme $\mathfrak{P}_2$ (ni à son importance historique), il faut accepter, en contrepartie, que les schèmes d'intelligibilité économiques puissent évoluer. Ce qu'avaient parfaitement compris les fondateurs ; ainsi s'exprimait Pareto [139] à propos du système de Walras : « Cette découverte est capitale, et l'on ne saurait trop priser le mérite de M. Walras.

Naturellement, la science s'est déjà développée et continuera à se développer à l'avenir, mais cela ne diminuera en rien l'importance de la découverte de M. Walras de même que les progrès de la mécanique céleste n'ont en rien diminué l'importance des *Principes* de Newton, au contraire ».

Chapitre 5

Sciences de l'apprentissage

Contents

Riassunto

Questo capitolo descrive la dualità di Isbell in scienze dell'apprendimento, in particolare nella teoria dell'indagine di Dewey. Quando Dewey ha denunciato la feticizzazione (*hypostatization*) della teoria della conoscenza, ha attaccato il metodo dimostrativo, ontologicamente essenzialista. Fermamente contrario alla divisione forzata dell'arte del ragionamento (un canone per l'analisi, un Organon per il metodo), Dewey ha costruito la sua teoria dell'indagine (*theory of inquiry*). Rispetto alla logica del suo tempo, la sua teoria è un programma su un'altra scala, in cui i metodi induttivi sono chiamati a svolgere un ruolo essenziale. Ma la sua teoria è anche contraria alla teoria della conoscenza usuale, di ispirazione kantiana. Mentre la teoria di Kant resta solo una teoria della conoscenza, sono i metodi di ricerca che, per Dewey, devono precedere la conoscenza. In questo senso, la sua teoria è una filosofia (e una pedagogia) del problema. Questa filosofia supera la logica deduttiva nel suo modo radicale di pensare le relazioni logiche, perché i processi sperimentali induttivi sono al centro della costruzione del problema. Su questa base, proponiamo di riformulare e modernizzare la teoria dell'indagine in termini di spazio-azione. Reinterpretiamo l'indagine come un insieme di contesti di tipizzazione e la progressione dell'indagine come un sistema di raffinamento dei contesti di tipizzazione. In tal modo, caratterizziamo il processo dell'indagine in termini di fasci e cofasci per raggiungere, alla fine, una dualità di Isbell.

Résumé

Ce chapitre aborde la dualité d'Isbell en sciences de l'apprentissage, et plus particulièrement dans la théorie de l'enquête de Dewey. Lorsque Dewey [44] dénonçait la fétichisation (*hypostatization*) de la théorie de la connaissance, il s'attaquait à la méthode démonstrative, ontologiquement essentialiste. Farouchement opposé à la division forcée de l'art du raisonnement — un canon pour l'analytique, un organon pour la méthode, Dewey [46] a échafaudé sa propre théorie de l'enquête (*theory of inquiry*). Comparée à la logique de son temps, sa théorie de l'enquête vise un programme d'une autre ampleur, où les méthodes inductives sont appelées à jouer un rôle essentiel. Mais sa théorie s'oppose aussi à la théorie de la connaissance habituelle, d'inspiration kantienne. Alors que la théorie kantienne est toujours une théorie de la connaissance, ce sont les méthodes de recherche qui, pour Dewey, doivent précéder la connaissance. En ce sens, sa théorie s'accepte comme une philosophie (et une pédagogie) du problème. Cette philosophie déborde la logique déductive dans sa façon radicale d'envisager les « relations » logiques, car les processus expérimentaux inductifs se retrouvent au centre de la construction du problème. Sur cette base, nous proposons de reformuler et de moderniser la théorie de l'enquête en termes d'espace-action. L'enquête y est réinterprétée comme un ensemble de contextes de typage et l'accumulation des expériences — la progression de l'enquête — comme un système de raffinement de contextes de typage. Ce faisant, nous caractérisons le processus de l'enquête en termes de faisceaux et cofaisceaux, pour finalement dégager une dualité d'Isbell.

Abstract

This chapter deals with Isbell duality in the learning sciences, and more specifically in Dewey's theory of inquiry. When Dewey [44] denounced the hypostatization of

the philosophy of knowledge, he tackled the demonstrative, ontologically essentialist method. Fiercely opposed to the forced division of the art of reasoning — a canon for analytic, an organon for method, Dewey [46] has elaborated his own theory of inquiry. Compared to the logic of his time, his theory of inquiry aims at a program on a different scale, where inductive methods are called upon to play an essential role. But his theory is also opposed to the philosophy of knowledge of Kantian inspiration. While Kant's theory is still a theory of knowledge, Dewey highlights the methods of research that must precede knowledge. In this sense, his theory is accepted as a philosophy (and a pedagogy) of the problem. This philosophy goes beyond deductive logic in its radical way of considering logical relations, since inductive experimental processes are at the center of the construction of the problem. On this basis, we propose to reformulate and modernize the theory of inquiry in terms of space-action. The inquiry is reinterpreted as a set of typing contexts and the accumulation of experiments — the progression of the survey — as a system of refinement of typing contexts. Therefore, we characterize the inquiry process in terms of sheafs and cosheafs, finally to reveal an Isbell duality.

5.1 La théorie de l'enquête de Dewey

5.1.1 Une logique singulière

On a coutume de présenter la logique de Dewey [46] comme un manifeste en pied-de-nez à la « vraie logique », la logique moderne, par exemple la logique des relations de Peirce, dont il faut se souvenir que Dewey fut l'élève à l'Université Johns Hopkins de Baltimore. Comparée à la logique de son maître, il est certain que la théorie de l'enquête de Dewey vise un programme d'une autre ampleur, au delà des traités de logique habituellement produits. Il ne s'agit pas d'élaborer une formalisation du langage, mais un art de résoudre les problèmes. Cet art non seulement déborde, dans son ambition, la simple formalisation du langage, mais d'une certaine façon la sublime dans sa façon radicale d'envisager les « relations » logiques.

Dans sa période classique, la logique ignorait les relations en tant que fonctions (monadiques $f(x)$, dyadiques $g(x, y)$, triadiques $h(x, y, z)$). Elle ne considérait que des prédicats (par exemple « être vivant ») et leur extension (la classe des êtres vivants). La logique moderne a eu ce mérite de voir le lien entre les prédicats et les classes comme des fonctions prédicatives, c'est-à-dire des relations, appliquées à des classes d'individu. Souvenons nous que c'est Frege qui découvre le premier la notion de fonction prédicative. Mais sa théorie est encore imparfaite, à plus d'un titre. D'une part, il n'y a aucune réflexion sur la prédicabilité des objets. Chez Frege [55] [56], les fonctions prédicatives peuvent admettre n'importe quel argument, ce qui implique l'ambiguïté de sa théorie (par exemple si la fonction prédicative est appliquée à elle-même) et, pire, son incohérence (paradoxe de Russell). D'autre part, le rôle de la copule n'est pas moins ambigu. Quelle relation traduit-elle ? Une relation d'appartenance, d'inclusion, d'identité ? Les relations sont-elles symétriques ou asymétriques ? Prenons l'exemple les relations dyadiques. Dans la relation xRy, reformulée $r(x, y)$ en notation fonctionnelle, (x, y) est-il un couple ordonné ou inordonné ? Pour Peirce [144], c'est un couple ordonné, qui oblige à étendre la logique des classes en une logique des relations. Pour Russell [153], cela ne peut pas être un couple ordonné, car la notion d'ordre implique la caractérisation d'une nouvelle relation entre x et y, ce qui rend la théorie circulaire. Mais il existe un point de vue intermédiaire consistant à considérer la relation xRy en intension, sans pour autant y voir des couples ordonnés. C'était précisément le point de vue de Russell.

Face à ces questionnements, Dewey propose une remise à plat radicale de la logique. Pour Dewey, l'idée de relation est d'emblée mal problématisée. Dans la logique des classes comme dans la logique des relations, le primat est, au fond, toujours donné à l'objet prédiqué. On part toujours d'une ontologie préétablie. Lorsque cette ontologie n'est pas assumée, elle peut aboutir à des ambiguïtés ou à des contradictions, comme chez Frege. Lorsqu'elle est assumée, elle peut être corrigée par une théorie des types, comme chez Russell [154]. Dans les deux cas, l'ontologie — explicite comme implicite — préexiste aux relations. C'est précisément contre cet ordre des choses que Dewey s'inscrit en faux. Il rejète toute ontologie essentialiste : ce sont les relations qu'il faut mettre au centre de la logique. Ce ne sont pas les objets qui sont en relation, mais les relations qui « créent » les objets. Il faut souligner la singularité d'un tel renversement, que seul un savant concours d'influences théoriques a pu permettre : la philosophie expérimentale de Bacon, le pragmatisme américain, la logique moderne et l'épistémologie évolutionniste (i.e. le darwinisme).

Il s'agit donc pour Dewey de rappeler à l'ordre la logique pour l'enrégimenter dans l'art plus vaste de l'enquête. Cette promotion de la logique peut s'interpréter comme l'affirmation d'une philosophie du problème, voire comme son acte de naissance, car c'est peut-être la première authentique philosophie du problème jamais imaginée (et dans ce cas la dialectique grecque serait en quelque sorte sa vie prénatale). Mais qu'est-ce qu'une philosophie du problème et qu'est-ce qu'une logique de l'enquête ?

Pour Dewey [44], la logique est « l'art de mettre le pensée à l'abri de l'erreur ». Ce que vise sa logique de l'enquête, c'est une refonte complète de l'*Organon*. Avant de tenter d'examiner ce que peut être cette refonte, il est utile d'exposer brièvement ce qu'elle ne peut pas être :

- Elle ne peut pas être le *Novum Organum* [14] d'un Bacon, car même si le nouvel Organon du philosophe anglais a le grand mérite de reposer sur une méthode de découverte (et non sur une méthode de démonstration), il lui manque encore, selon Dewey, une vision générative, « génétique », « darwinienne », seule capable de décrire *organiquement* le processus de l'enquête.

- Elle ne peut pas être l'*art de pensée* de Port-Royal [8], car même si la logique des Messieurs offre une audacieuse synthèse entre la vielle logique aristotélicienne et la nouvelle méthode, il ne s'agit encore que d'une ébauche insuffisamment émancipée de la réthorique et, surtout, dépourvue d'une méthode constructive donnant les clés de son articulation avec la vielle logique.

- Elle ne peut pas être la logique transcendantale de Kant [102], car s'il y a bien un renversement de l'objet et du sujet, celui-ci est stérile pour l'art de construire l'enquête. La logique transcendantale de Kant donne bien des conditions de résolution du problème, mais ne donne aucune méthode de résolution effective. Ce faisant, elle n'est pas à proprement parler problématisante.

- Elle ne peut pas être le système logique de Mill [132], qui apparait davantage comme une juxtaposition de principes (déductifs, inductifs, méthodologiques, arithmétiques, géométriques) permettant de conduire une démarche scientifique, que comme une méthode logique intégrée. La logique de Mill est seulement un *ensemble* de méthodes de raisonnement, un ensemble qui ne fait pas *système*.

- Enfin, elle ne peut pas être l'idéographie de Frege [57], qui se donne pour objectif de réaliser le vieux rêve Leibnizien d'une *lingua characteristica*, là où la logique moderne des prédécesseurs comme Boole ou Schröder se contentait d'être un *calculus philosophicus*[1]. En effet, le programme frégéen est orthogonal au programme deweysien : ce n'est pas l'universalité de la langue (à travers l'idée de contenu formel) qui intéresse Dewey, mais la logique de l'invention.

À ce stade, la logique de l'enquête de Dewey apparait donc comme un objet largement non identifié, qui possède certes des inspirateurs, mais qui ne possède pas de précédent à proprement parler. C'est pourquoi la logique de Dewey a pu créer tant de malentendus (qui culmineront avec sa polémique contre Russell), au point de paraître parfois fantaisiste. Comment la logique de Dewey peut-elle être crédible au yeux d'un logicien qui ne jure que par des méthodes rigoureusement

1. Rappelons la pensée de Leibniz : « l'écriture conceptuelle doit peindre non pas les paroles mais les pensées ».

« démonstratives » ? La logique formelle moderne n'offre aucun élément appuyant cette crédibilité. Faut-il en conclure que le terme « logique » est foncièrement usurpé, et que son usage par Dewey doit définitivement être considéré comme une provocation ? Ce chapitre tente de montrer que l'usage du terme logique est, au contraire, légitime, si on accepte de le confiner dans un cadre rigoureux qu'on prendra soin d'expliciter. Certains développements des mathématiques contemporaines et de la logique formelle contemporaine fournissent des outils qui peuvent être utiles à cette théorie de l'enquête. Il n'est pas question d'entrer ici dans les détails techniques de la théorie de l'enquête, mais simplement de décrire certains des principaux concepts qui permettent de défendre la pensée logique de Dewey, et par conséquent d'en révéler la contemporanéité insoupçonnée.

5.1.2 Une philosophie du problème

Lorsqu'il élabore sa logique de l'enquête, Dewey fait une double critique de Descartes et de Kant. Ce qu'il reproche à Descartes, c'est que sa méthode présuppose que le problème est déjà-là : l'inconnu du problème est déjà spécifié par du connu. Pour Dewey, la véritable méthode n'est pas d'analyser le problème mais de le concevoir. Alors que l'analyste est celui qui « est capable de comprendre le problème qui se pose », comme l'écrivait Arsac [10], le concepteur est celui « qui sait que les problèmes ne se posent pas tout seuls, et qu'il doit être capable de les poser », pour reprendre la formule de Le Moigne [117]. Or, pour Dewey, la conception du problème intéresse le logicien au premier chef. Au début du XXè siècle, rares sont ceux qui ont eu une telle lucidité. *La pensée et le mouvant* de Bergson [18] est écrit à la même époque, entre 1903 à 1923, mais ne va pas aussi loin que Dewey, tandis que l'oeuvre majeure de Bachelard ne commence qu'au milieu des années trente. Il faut attendre l'avènement de la théorie générale du système pour voir enfin une discipline subordonner explicitement le problème à la problématisation (i.e. le modèle à la modélisation). Ainsi, pour Fabre [52], Dewey est tout simplement le premier auteur d'une philosophie (et d'une pédagogie) du problème.

Mais Kant n'échappe pas non plus à la critique du fétichisme épistémologique de Dewey. Si ce dernier peut être d'accord avec Kant sur la reconnaissance de principes transcendantaux conditionnant la connaissance (analytique transcendantale, méthodologie transcendantale), cette reconnaissance ne fonde pas pour autant une philosophie du problème. La métaphore du tribunal, à laquelle est associée la théorie du jugement, est toujours tributaire d'une vision essentialiste du problème. Il faut saluer Kant d'avoir su distinguer le jugement-comme-contenu (*Urteil*) du jugement-comme-acte (*Beweis*), mais, dans un tribunal, le contenu à juger est déjà-là. Comme l'a bien vu Deleuze [38], « Kant définit encore la vérité d'un problème par sa possibilité de recevoir une solution ». C'est pourquoi Dewey se départit du principe de jugement, pour lui préférer celui d'enquête (*inquiry*). La différence entre l'enquête policière et le jugement judiciaire tient précisément à ce que l'enquête a pour objectif de déterminer qui sera appelé au tribunal pour le jugement. Or, cette étape est essentielle pour Dewey, l'enquête incombe aussi au logicien.

À ce stade, une première incursion dans le domaine de la logique contemporaine est nécessaire. Ce départ de Dewey par rapport à Kant correspond assez bien, toutes choses égales par ailleurs, à la position critique de Girard par rapport à Martin-Löf, deux des principaux protagonistes de la logique contemporaine. Girard et Martin-Löf se rejoignent sur la correspondance preuve/programme (*cf. supra* chap. 3). Mais là où le logicien suédois (par exemple [126] [127]), fidèle à la théorie kantienne, cherche à approfondir la logique (et le calcul associé) du côté du jugement (à travers la notion de type dépendant par exemple), le logicien français vise, à partir des années 90 (notamment dans [68] [67]), une reconstruction radicale de la logique où les types sont *obtenus comme résultats* d'interactions, plutôt que déduits d'autres types (comme types dépendants). Ce renversement de point de vue, qui fait passer de types *a priori* à des types *a posteriori*, est possible grâce à un jeu d'interactions fondé sur les coupures (i.e. les réductions par *modus ponens*, voir aussi chap.3).

Cette logique des interactions (que Girard nomme « géométrie de l'interaction ») donne une première intuition de ce que pourrait être une philosophie constructive du problème, où les problèmes, vus en quelque sorte comme problèmes-types, sont obtenus comme résultats d'un jeu d'interactions. Chez Girard comme chez Dewey, on assiste à un recentrage de la logique sur les relations, sur les interactions, plutôt que sur les objets mis en relation. L'ambition est légitime mais pose néanmoins un défi ; c'est qu'il faut disposer (ou inventer) de relations « naturelles » pour viser un tel a-posteriorisme. Chez Girard, les relations sont naturelles dans le sens où elles exploitent la règle de la coupure, qui est la pierre angulaire de la théorie de la démonstration. C'est en exploitant de façon systématique les coupures entre propositions logiques que Girard a construit sa géométrie de l'interaction. Mais la logique de l'enquête de Dewey diffère fortement de la géométrie de l'interaction. Comme nous l'avons dit, elle entend bien déborder les approches purement déductives, alors que la géométrie de l'interaction est encore un produit de la théorie la la démonstration. S'il faut reproduire pour le problème ce que Girard a conçu pour la proposition(-comme-type), il faut imaginer une autre « technologie ». Un problème n'est pas une proposition logique. Mais alors comment choisir une technologie aussi naturelle que possible ? Pour tenter d'y répondre, il faut détailler davantage la théorie de l'enquête originale de Dewey, et en particulier sa théorie des propositions.

5.1.3 Le processus de l'enquête selon Dewey

Ce que vise Dewey, c'est une méthode constructive permettant de comprendre comment conduire une enquête. Il s'agit donc d'une enquête sur l'enquête. Pour y parvenir, Dewey [46] distingue trois phases :

- le début de l'enquête, qui caractérise une situation indéterminée ;
- le processus de l'enquête, qui convoque des hypothèses ou des tests ;
- la fin de l'enquête, qui aboutit à la conclusion, et à ce que Dewey appelle l'assertibilité garantie (*warranted assertibility*).

Au début de l'enquête, l'enquêteur a pour mission de collecter le matériau de l'enquête qui fait défaut. À ce stade, il dispose de deux sortes de propositions : les propositions universelles (« tout assassin est condamnable ») et les propositions particulières (« Brutus est un assassin »).

- Les propositions universelles jouent le rôle d'hypothèses, de tests pour les individus ;
- Les propositions particulières caractérisent l'exploration des individus de l'enquête.

Pour éclairer sa méthode, Dewey prend plusieurs exemples, dont celui de la recherche du coupable d'un crime. Il est facile de trouver des propositions universelles correspondant à ce contexte criminel, par exemple, « toute personne tuant autrui avec préméditation est un assassin », « tout assassinat présuppose un mobile », « toute condamnation doit reposer sur une preuve », « tout relevé d'empreinte sur l'arme du crime est une preuve à charge », ou encore « tout suspect possédant un alibi est innocent », etc. Dans ce cadre, les propositions particulières sont des tests appliqués aux prévenus : « Pierre est soupçonné d'assassinat », « Pierre possède un alibi », « Pierre a laissé ses empreintes sur l'arme du crime », « Pierre est l'assassin », « Pierre est reconnu coupable », etc.

Dewey fait alors preuve d'une grande originalité dans sa façon d'articuler l'universel et le particulier. Pour bien comprendre son apport, détaillons l'exemple de l'enquête policière. Le problème commence par la découverte d'un individu assassiné (supposé comme tel après le diagnostic du médecin légiste). L'enquête vise à déterminer le ou les coupables du crime, puisque l'assassin peut avoir des complices. Le ou les coupables sont réputés identifiés lorsqu'ils passent avec succès un ensemble de tests, ou plus exactement un ensemble de combinaisons de tests formant des propositions universelles (ne pas avoir d'alibi, avoir laissé des empreintes, avoir un mobile, faire des aveux, être pris en flagrant délit...). Notons que ces tests sont des conditions de possibilité d'une solution, mais ne garantissent pas l'existence de la solution. L'enquête est réputée résolue uniquement si elle aboutit à la détermination d'un « témoin logique » (le coupable !).

La grande idée de Dewey est de coupler la recherche du coupable (qui est le témoin logique de la proposition existentielle « il existe un individu coupable de l'assassinat ») dans un matériau d'enquête donné, avec la recherche du matériau d'enquête lui-même, qui s'exprime par des propositions universelles. D'où une dialectique entre les hypothèses et les individus : les hypothèses testent les individus, qui, en retour, étayent les hypothèses (*De facto*, c'est exactement de cette façon que se déroule une enquête policière).

On comprend alors pourquoi la logique de Dewey a tant perturbé les logiciens, car elle entraîne deux conséquences :

- Elle fait sortir la logique des gonds du calcul des prédicats, ce qui, pour les années 30 (c'est-à-dire avant le paradigme des preuves-comme-programmes), est encore une fois très audacieux.

- Elle nous enjoint à développer une autre logique formelle.

Du point de vue de la logique formelle, la question centrale est de savoir comment interpréter la notion de « matériau de l'enquête », qui résume l'ensemble des hypothèses de l'enquête à un état donné de l'enquête. Une première idée est de recourir au polymorphisme. Le polymorphisme, représenté en logique par le système **F** de Girard — ce n'est pas un hasard, est un lambda-calcul du second ordre permettant de manipuler des propositions avec plus de souplesse [2]. L'idée est la suivante : l'enquêteur peut vouloir envisager plusieurs situations lorsqu'il émet une hypothèse. Par exemple, s'il fait l'hypothèse qu'un suspect dispose d'un alibi, il sait que cet alibi

2. Le lambda-calcul du second ordre (ou lambda-calcul polymorphe) représente une extension du lambda-calcul simplement typé dans lequel on autorise une quantification universelle sur les types, ce qui permet de démontrer des propriétés particulièrement riches.

peut être valable ou fabriqué par un complice. Le polymorphisme permet d'envisager des situations multiples sous une hypothèse (polymorphe) unique.

Cependant, il nous semble que le polymorphisme manque l'essentiel de l'apport deweysien. Malgré son grand intérêt, il reste une méthode purement démonstrative. Or, la méthode deweysienne est viscéralement euristique, tournée vers la position du problème. Le polymorphisme logique est peut-être nécessaire à la théorie de l'enquête, mais il n'est pas suffisant.

Mais la logique moderne développée à partir du milieu des années trente nous fournit un autre point d'appui pour prolonger les intuitions deweysienne : la notion de contexte logique et ses multiples ramifications.

5.1.4 L'enquête comme jugement dans un contexte

En logique, parler de preuve d'une proposition sous une hypothèse n'a de sens que relativement à un contexte, qui est une liste d'hypothèses apparaissant une seule fois. Ainsi, en calcul des séquents, l'assertion

$$\Gamma, A \vdash B$$

signifie que B peut être inférer à partir de A sous les hypothèses Γ. Toute inférence est ainsi paramétrique (ici en Γ). C'est encore valable quand le contexte est vide, et dans ce cas on peut omettre Γ (=∅).

Ce raisonnement paramétrique se transpose assez bien à l'enquête. Nous dirons qu'une hypothèse d'enquête aboutit à une conclusion relativement à un matériau déjà constitué, considéré comme acquis : le matériau de l'enquête est interprété comme un contexte.

Soit a un individu ; a est jugé *coupable* d'un fait i — notation $coup_i(a)$ — s'il satisfait un certain nombre de conditions (éléments à charge) : être suspect, ne pas posséder d'alibi, avoir un mobile, être reconnu par un témoin, être dénoncé par un complice, faire un aveu, etc. Ces conditions peuvent plus précisément s'écrire sous la forme d'une combinaison de conjonctions et de disjonctions : être suspect et être confondu par un témoin, ou être dénoncé par un complice (suspect ou non), etc. On suppose ainsi que les éléments à charge qui forment le contexte du jugement peuvent se laisser décomposer par l'utilisation de plusieurs conjonctions et disjonctions selon un connecteur synthétique (ou généralisé) de la forme $\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} P_{i,j}(x)$ où les $P_i, j(x)$ sont des prédicats atomiques (i.e. des propositions du calcul des prédicats du premier ordre). Finalement, en utilisant les lois de De Morgan, ce connecteur synthétique peut être ramené à un connecteur purement conjonctif ou disjonctif [3].

Chaque niveau de culpabilité, ou de responsabilité, peut alors être exprimé sous la forme d'une combinaison d'éléments à charge : acheter l'arme du crime et commettre le crime, acheter l'arme du crime et commanditer un assassin, aider un assassin à s'enfuir, etc. En notant Γ un contexte d'éléments à charge, nous dirons qu'un jugement satisfait la forme

$$\Gamma \vdash coup_i(a),$$

c'est-à-dire : la culpabilité i de a est prouvable dans le contexte Γ. Dans le cas contraire d'un jugement non concluant, nous écrirons $\Gamma \nvdash coup_i(a)$: le contexte de l'enquête ne permet pas d'établir la culpabilité de a (parce que les éléments à charge

3. En supposant que les éléments à charge possèdent une négation qui font sens : ne pas être suspect, ne pas être confondu par un témoin, ne pas être dénoncé par un complice, etc.

sont insuffisants), ce qui ne veut pas dire que a n'est pas coupable ! Nous dirons qu'un jugement est *concluant* si le contexte d'accusation, i.e. les éléments à charge, permet d'établir un certain niveau de culpabilité i.

Il n'est donc pas certain qu'un contexte d'accusation donné puisse permettre d'établir la culpabilité d'un suspect, pour deux raisons :

- le contexte accusatoire peut manquer d'éléments à charge ;
- le coupable peut ne pas faire partie de la liste des suspects.

C'est donc un double problème auquel est confronté l'enquêteur. On remarque au passage qu'on retrouve la forme interrogative de la proposition chère à Dewey. Chez Dewey, une proposition est toujours interrogative (ou indéterminée) : c'est une proposition en attente de jugement. Lorsqu'elle devient affirmative ou dénégative (après enquête), elle est qualifiée d'assertion [4]. On constate que le prédicat $coup_i(x)$ traduit une première forme d'interrogation : on sait qu'il existe un coupable — un x tel que $coup_i(x)$ — mais on ne sait pas lequel, et il faut « tester » les suspects pour le trouver ; tandis que, si a est bien le coupable, le jugement $\Gamma \vdash coup_i(a)$ traduit une seconde forme de proposition interrogative, car on ne sait pas *a priori* sous quelles hypothèses le prouver, et ce sont maintenant les hypothèses qu'il faut explorer (il faut chercher Γ). Le rôle du logicien-enquêteur est de déterminer ce qui est exactement reproché à chaque suspect, c'est-à-dire de déterminer le niveau de culpabilité précis de chaque suspect, en élargissant au besoin la liste des suspects.

La question centrale, du point de vue logico-mathématique, est alors la suivante : comment articule-t-on l'évolution du contexte d'accusation et celui du domaine des suspects ? Clairement, la question n'est pas de savoir comment l'enquêteur construit de nouvelles hypothèses, c'est-à-dire comment il raffine la structure de l'enquête ou son domaine d'investigation. Cette question, qui appartient à l'art de l'enquête, sort du domaine de la logique (et probablement des mathématiques). La question est de savoir quel raisonnement, ou quel principe, lie le raffinement de la structure de l'enquête et le raffinement corrélatif de son domaine d'investigation. Pour y répondre, notre conviction est qu'il faut dépasser l'opposition entre propositions générales et propositions particulières, et de la remplacer par une dialectique entre *jugement d'enquête* et *raffinement d'enquête*, qui conduit à une mathématique de l'enquête bien particulière.

5.2 La mathématique de l'enquête

5.2.1 Pas d'enquête et raffinement d'enquête

Pour traduire la notion de domaine d'investigation d'une enquête, c'est-à-dire l'ensemble des suspects de l'enquête, deux approches sont en réalité possibles : une approche extensive et une approche intensive. La première consiste à considérer l'ensemble des suspects explicitement comme un domaine défini en extension. On écrira donc $j \in J$ où J est l'ensemble des éléments j représentant les suspects de l'enquête. La seconde consiste à définir le domaine d'investigation en intension (ou en

4. Dewey reprend donc la terminologie de Russell (les propositions deviennent des assertions après jugement), qui avait eu la bonne idée de traduire le terme *Urteil* de Frege par assertion (et non par proposition). Il parait en effet judicieux de réserver le terme proposition (qui propose) à un énoncé en attente de jugement.

compréhension). Dans ce cas, on considère l'ensemble des suspects comme l'ensemble des prédicats qui appartiennent au *concept* « être suspect ». Le domaine d'investigation de l'enquête apparait alors, parmi l'ensemble des prédicats caractérisant l'enquête, comme le sous-ensemble de prédicats spécialisés dans la définition du concept « être suspect » : être à proximité du lieu du crime, être un proche de la victime, avoir un mobile...

Dans ce chapitre, nous portons notre attention sur l'approche intensive. Suivant cette approche, nous pouvons introduire un nouveau contexte de jugement Δ traduisant le domaine d'investigation. La nouvelle assertion

$$\Gamma, \Delta \vdash B$$

signifie que B peut être inférer à partir de la structure d'enquête Γ et de la liste des suspects définie (en intension) par Δ. Le contexte Δ interprète en quelque sorte le « typage » des individus de l'enquête [5], tandis que Γ interprète la « structure » de l'enquête.

Ce faisant, on peut expliciter les façons dont l'enquête peut évoluer [6] :

- Si $\Gamma_1, \Delta \vdash B \rightarrow \Gamma_2, \Delta \vdash B$, l'enquête évolue par modification de la structure de l'enquête.
- Si $\Gamma, \Delta_2 \vdash B \rightarrow \Gamma, \Delta_2 \vdash B$, l'enquête évolue par modification du champ d'investigation de l'enquête.

On constate cependant qu'il n'y a pas de réelle différence (i.e. formelle) entre les contextes de structure d'enquête et de champ d'investigation. Au fond, toute évolution d'une enquête se laisse exprimer par une formule du type

$$\Theta_1 \vdash B \rightarrow \Theta_2 \vdash B \tag{5.1}$$

où $\Theta := \Gamma, \Delta$ caractérise le contexte globale de l'enquête. On comprend que le couple Γ, Δ a peu d'intérêt en soi ; il n'a d'intérêt que parce qu'il répond à l'exigence génétique de la théorie de l'enquête, en ouvrant une dialectique possible entre le général et le particulier. Le problème, c'est que la formulation explicite de cette différence n'apporte aucune piste pour étayer une telle dialectique. Nous pensons que *le support conceptuel de cette dialectique se trouve fondamentalement ailleurs que dans le couple général/particulier. Notre idée est que cette dialectique ne prend sens qu'au travers d'une reposition du problème en termes de raffinement d'enquête.*

Pour préciser notre idée, reprenons l'expression 5.1. La question centrale, du point de vue logico-mathématique, est la suivante : comment distinguer une évolution contextuelle d'une *émergence* contextuelle ? En d'autres termes, comment caractériser les cas où le pas $\Theta_1 \rightarrow \Theta_2$ traduit quelque chose de réellement nouveau ? Quel sens pourrait avoir le principe de nouveauté ou d'émergence dans ce cadre ? Intuitivement, nous pouvons dire que chaque fois que l'enquêteur introduit quelque chose de nouveau dans l'enquête (parce que l'état de l'enquête l'y conduit), le contexte Θ s'en trouve

5. Il est tenant de rapprocher ce cadre d'analyse de la théorie des types de Church, qui distingue contexte logique et *contexte de typage*. Cependant la notion de contexte de typage est ici très différente : elle agit fondamentalement comme une suite d'hypothèses « logiques », alors qu'elle est utilisée chez Church pour contraindre les termes, via leur type.

6. On utilise la flèche $\vdash$ comme simple abréviation de « devient » ou « évolue en ». Cette flèche ne renvoie donc à aucun système formel connu.

en quelque sorte « raffiné ». Dans ce sens, nous parlerons d'*évolution contextuelle* lorsque le contexte de l'enquête évolue dans un support donnée, i.e. lorsque le prédicat synthétique change sans que de nouveaux prédicats apparaissent, et d'*émergence contextuelle* lorsque de nouveaux prédicats apparaissent dans le prédicat synthétique.

Ces définitions conduisent alors aux notions de « support d'enquête », de « pas d'enquête » et de « raffinement d'enquête ».

Définition 82 (Support d'enquête)**.** *On appelle* support d'enquête *l'ensemble* $\{P_{i,j}\}_{i\in I, j\in J}$ *constitutif du prédicat synthétique* $P := \bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} P_{i,j}(x)$ *interprétant le contexte de l'enquête.*

Définition 83 (Pas d'enquête)**.** *On appelle* pas d'enquête *un jugement* $\Theta_1 \vdash B \to \Theta_2 \vdash B$ *où* Θ_1 *et* Θ_2 *sont de même support.*

Définition 84 (Raffinement d'enquête)**.** *On appelle* raffinement d'enquête *un jugement* $\Theta_1 \vdash B \to \Theta_2 \vdash B$ *où* Θ_1 *et* Θ_2 *sont de support différent.*

Le pas d'enquête est ce qui permet de passer d'un jugement (concluant $\cdots \vdash \cdots$ ou non concluant $\cdots \nvdash \cdots$) à un jugement dérivé (lui-même concluant ou non concluant). Par exemple le jugement « X a donné de l'argent à Y » peut permettre de dériver le jugement « Y a rendu un service à X » (en échange de cet argent). Le raffinement d'enquête est, pour sa part, ce qui permet de passer d'un jugement « simple » (concluant ou non concluant) à un jugement enrichi par de nouveaux prédicats raffinant les anciens prédicats. Par exemple on pourra dire que le prédicat « être un assassin » raffine le prédicat « être un meurtrier », car le premier présuppose une préméditation (en plus d'une intention de tuer). Autrement dit, un raffinement d'enquête est un jugement d'ordre supérieur, alors qu'un *pas d'enquête* n'est qu'une simple dérivation de jugement.

Ces trois notions permettent à l'enquêteur d'avoir une représentation rigoureuse de l'enquête, dans le sens où elles permettent d'organiser différents contextes possibles d'une enquête dans un tout cohérent. Mener une enquête n'est pas seulement concevoir différents contextes d'enquête ; ce n'est pas seulement les inventorier en s'efforçant de ne pas en oublier ; c'est aussi avoir une représentation claire des *relations* qui maillent les contextes de l'enquête. Or ces relations peuvent être « horizontales » ou « verticales », suivant que les contextes en relation partagent ou non le même support d'enquête, et il faut comprendre que les relations verticales, qui traduisent les raffinements d'une enquête, ne renvoient pas seulement aux raffinementx du domaine d'investigation de l'enquête. L'enquêteur peut ajouter de nouveaux prédicats aussi bien pour affiner l'ensemble des suspects que pour affiner la « structure » de l'enquête.

L'enquêteur doit ainsi se représenter l'évolution de l'enquête comme un *réseau*. Ce réseau est d'un genre particulier, non seulement parce qu'il exhibe des relations horizontales et des relations verticales, mais aussi parce qu'il permet d'envisager un troisième type de relations croisant les pas d'enquête et les raffinements d'enquête. En effet, il est naturel de penser que l'enquêteur raffine aussi les *pas d'enquête*, parce que les pas d'enquête sont insuffisamment spécifiés au commencement de l'enquête. La construction de l'enquête doit aussi incorporer la construction des évolutions possibles de l'enquête [7]. Nous entrons ici dans le coeur du sujet de la nature génétique de la théorie de l'enquête, qui permet de donner une version *constructive* des pas

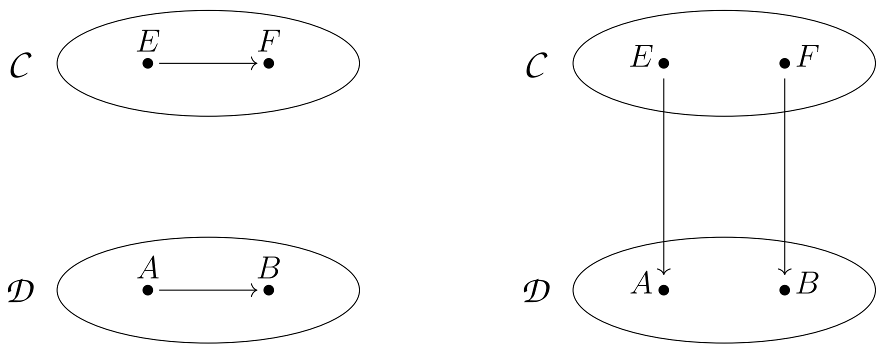
7. Et on remarque alors que la théorie de l'enquête débouche sur un bel exemple de thématisation (*cf. supra*, introduction, 1.5).

d'enquête. La prise en compte de ce nouveau type de relation croisée conduit lors à la notion de *système de raffinement*.

5.2.2 Système de raffinement

À ce stade, on perçoit maintenant certaines similitudes entre la logique de l'enquête et la logique de Hoare. La logique de Hoare [89] se donne pour objectif de dire comment un programme transforme l'état d'un système, entre un état antérieur P et un état postérieur Q. Elle se formalise par le *triplet d'Hoare* (P, t, Q). Soient P un ensemble de prédicats décrivant l'état antérieur d'un système, Q un ensemble de prédicats décrivant son état postérieur, et t un programme « transformateur » transformant P en Q, c'est-à-dire tel que $P \xrightarrow[t]{} Q$[8]. On constate que le triplet d'Hoare correspond assez bien à la logique de l'enquête, si P est ré-interprété comme un état antérieur de l'enquête, Q comme un état postérieur et t comme une étape de progression — le pas — de l'enquête. Dans ce cas, $P \xrightarrow[t]{} Q$ se lit « le pas d'enquête t transforme l'état d'enquête P en état Q ». La seule différence est dans l'interprétation du transformateur t, qui n'est pas un programme informatique mais une investigation policière (une autre forme de jugement en somme).

Sur cette base, il est possible de formaliser l'évolution de l'enquête dans le langage de la théorie des catégories, en s'inspirant des *systèmes de raffinement de type* introduits par Melliès et Zeilberger [129] [130]. Nous allons définir les *états d'une enquête* comme objets d'une catégorie, les *pas d'enquête* comme les morphismes de cette catégorie, et les *raffinements d'enquête* comme les foncteurs entre deux catégories d'états d'enquête. Les morphismes de cette catégorie interprètent donc intuitivement les relations horizontales à support d'enquête constant, tandis que les foncteurs interprètent les relations verticales entre les contextes d'enquête, c'est-à-dire les émergences contextuelles. Les figures 5.1a et 5.1b représentent ainsi respectivement les morphismes et les foncteurs de la catégorie des états d'enquête.



(a) Les évolutions contextuelles de d'enquête comme morphismes

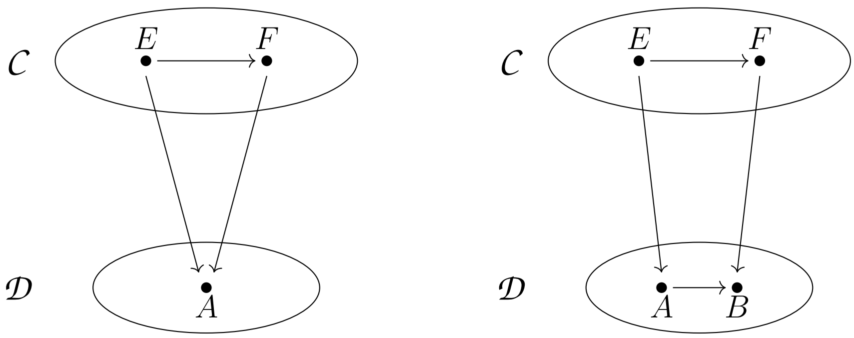
(b) Les émergences contextuelles de d'enquête comme foncteurs

FIGURE 5.1 – Les états d'enquête comme catégories

Les cas les plus intéressants sont ceux où les pas d'enquête sont liés à un ou plusieurs raffinements d'enquête. Le premier cas est celui où deux états E et F raffinent le même état d'enquête A (figure 5.2a). Le second cas est celui où ils raffinent un état d'enquête différent (figure 5.2b). Ce dernier cas est une généralisation du

8. $\{P\}T\{Q\}$ dans la notation de Hoare.

premier dans lequel A est identifié à B ($f = id$). C'est la raison pour laquelle on parlera de *sous-pas* à propos du premier cas (en tant que pas raffinant un même état antérieur).



(a) Sous-pas (b) Pas

FIGURE 5.2 – Les relations entre pas d'enquête et raffinement d'enquête

Mais, puisque les foncteurs transforment aussi les morphismes, il existe encore le cas plus général où le pas $E \to F$ est lui-même raffiné (figure 5.3). Nous parlerons dans ce cas, à l'instar de Melliès et Zeilberger, de *système de raffinement*.

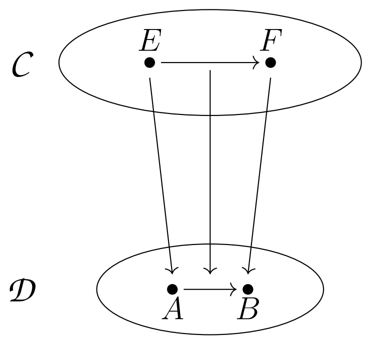


FIGURE 5.3 – Système de raffinement

Les systèmes de raffinement laissent ainsi percevoir la manière dont le contexte structurel de l'enquête et son domaine d'investigation peuvent dépendre l'un de l'autre :

- lorsque le raffinement de l'enquête provient du contexte structurel de l'enquête (via le prédicat composite Γ), on conclut que les propositions générales influent sur les propositions particulières.
- lorsque le raffinement de l'enquête provient du domaine d'investigation de l'enquête (via le prédicat composite Δ), on conclut que les propositions particulières influent sur les propositions générales.

Les systèmes de raffinement traduisent finalement une forme de ramification de l'enquête, qui peut s'analyser en termes de faisceaux et préfaisceaux.

5.2.3 Représentation faisceautique des ramifications de l'enquête

Nous pouvons maintenant présenter les principales définitions utiles à notre reformulation catégorique de la théorie de l'enquête. Il nous faut d'abord introduire la notion d'*état* d'une enquête.

Définition 85 (État d'une enquête)**.** *On appelle* état d'une enquête *un ensemble de prédicats E interprétant les éléments constitutifs d'une enquête, i.e. le contexte structurel de l'enquête et son domaine d'investigation.*

Sur cette base, on peut alors définir les notions de *catégorie d'enquête* et de *foncteur d'enquête*.

Définition 86 (Catégorie d'enquête)**.** *On appelle* catégorie d'enquête *une catégorie*[9] *dont*

- *les objets sont les états de l'enquête E ;*
- *les morphismes sont les pas d'enquête t tels que $E_1 \xrightarrow{t} E_2$;*
- *l'application identité est le pas d'énquête nul tel que $E \xrightarrow{id} E$;*
- *la composition est l'application $\circ$ telle que, pour tous pas d'énquête $E_1 \xrightarrow{t_1} E_2$ et $E_2 \xrightarrow{t_2} E_3$, alors $E_1 \xrightarrow{t_2 \circ t_1} E_3$.*

Définition 87 (Foncteur d'enquête)**.** *Soient deux catégories d'enquête $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, deux états d'enquête $E \in \mathcal{C}$ et $F \in \mathcal{D}$ et deux morphismes $f \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C})$ et $g \in \mathbf{Mor}(\mathcal{D})$. On appelle* foncteur d'enquête *$R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur*[10]*, tel que $E \overset{R}{\mapsto} F$ et $f \overset{R}{\mapsto} g$.*

Un foncteur d'enquête est donc un foncteur de *raffinement* : $E \overset{R}{\mapsto} F$ se lit « E raffine F » et se note également $E \sqsubset F$.

Les définitions suivantes sont adaptées de Melliès et Zeilberger [130].

Définition 88 (Système de raffinement)**.** *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories d'enquête. On appelle* système de raffinement *un foncteur $\mathbf{p} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que, pour tout $E \in \mathcal{C}$ et $F \in \mathcal{D}$, $\mathbf{p}(E) = F$.*

Définition 89 (Jugement de typage)**.** *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $E, F \in \mathcal{C}$ deux états d'enquête. On appelle* jugement de typage *un triplet (E, f, F) tel que $E \sqsubset dom(f)$ et $F \sqsubset cod(f)$, notation $E \underset{f}{\Longrightarrow} F$. On appelle* sous-jugement de typage *un jugement de typage tel que $f = id$, notation $E \Longrightarrow F$.*

Les systèmes de raffinement et les jugements de typage permettent de définir des morphismes de systèmes de raffinement. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ sont des catégories d'enquête et si $\mathbf{p} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $\mathbf{q} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ sont deux systèmes de raffinement, alors il existe une paire de foncteurs $F = (F_{\mathcal{C}}, F_{\mathcal{D}})$ telle que $F_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ et $F_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$ et tel que le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "\mathbf{p}"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "\mathbf{q}"] \\ \mathcal{D} \arrow[r, "F_{\mathcal{D}}"'] & \mathcal{N} \end{tikzcd}$$

Figure 5.4 – Morphismes de systèmes de raffinement

9. Voir chap 2, pour la définition d'une catégorie
10. Voir chap 2, pour la définition d'un foncteur.

Ce diagramme énonce que le foncteur F transporte les $\mathbf{p}$-jugements de typage en $\mathbf{q}$-jugements de typage, ce que traduit la règle de typage suivante :

$$\frac{A \underset{f}{\Longrightarrow} B}{F(A) \underset{F(f)}{\Longrightarrow} F(B)}\ \mathrm{F}$$

Il nous reste alors à introduire la notion de dérivation de jugement de typage.

Définition 90 (Dérivation de jugement de typage)**.** *Soit* (E, f, F) *un jugement de typage. On appelle* dérivation de jugement de typage *un morphisme* $\alpha : E \to F$ *dans* $\mathcal{D}$ *tel que* $\mathbf{p}(\alpha) = f$*, notation* $E \overset{\alpha}{\underset{f}{\Longrightarrow}} F$*.*

La problématique est la suivante pour l'enquêteur. Que peut-il conclure, à partir d'un état d'enquête, d'un jugement de typage sous-jacent, c'est-à-dire d'un état antérieur ayant modifié le typage de l'enquête ? Formellement, l'enquêteur part d'un jugement de typage $A \underset{f}{\Longrightarrow} B$ et d'un raffinement $E \sqsubset A$. Dans le cas trivial où il y a seulement un jugement de typage dégénéré $A \underset{id}{\Longrightarrow} A$ (comme illustré sur la figure 5.2a), par exemple parce que c'est le début de l'enquête, l'enquêteur aura simplement à raffiner l'état antérieur de l'enquête (i.e. l'enquête avant raffinement). Dans le cas où l'enquête a déjà produit un jugement de typage $A \underset{f}{\Longrightarrow} B$, il peut se servir du jugement $\underset{f}{\Longrightarrow}$ pour aboutir au nouvel état d'enquête après raffinement, de façon à compléter le carré commutatif 5.5, qui représente un *pushforward.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{p}"'] & fE \arrow[d, "\mathbf{p}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

FIGURE 5.5 – Déduction d'un jugement de typage comme *pushforward*

Mais l'enquêteur peut tenter d'aller plus loin en explorant les raffinements des jugements de typage. Dans ce cas, partant de la même situation $A \underset{f}{\Longrightarrow} B$ et $E \sqsubset A$, il considère tous les raffinements α tels que $\mathbf{p}(\alpha) = f$. Mathématiquement, il considère alors le préfaisceau

$$F^+ : (E, f) \mapsto \{\alpha | E \overset{\alpha}{\underset{f}{\Longrightarrow}} F\}. \tag{5.2}$$

Interprétons cet objet mathématique. Lorsqu'un nouvel élément est ajouté à l'enquête, l'état de l'enquête est *raffinée* : l'état d'enquête E raffine l'état d'enquête A ($E \sqsubset A$). L'enquêteur peut alors se servir de ce raffinement pour raffiner le pas d'enquête qui avait mené de A à B. Cela ne le conduit pas seulement à raffiner l'état d'enquête postérieur F (par rapport à l'état postérieur avant raffinement B), mais plus fondamentalement à raffiner le pas d'enquête $A \to B$. On comprend alors l'intérêt que peut avoir l'enquêteur à exploiter le raffinement $E \sqsubset A$ pour trouver l'état d'enquête F qui raffine l'état B (qui n'est peut-être pas évident à trouver). En effet, parmi les différents pas d'enquête $\alpha : E \to F$, certains sont peut-être plus à même de faire sens pour l'enquêteur, et on comprend qu'un raffinement $E \sqsubset A$ peut permettre de valider un pas d'enquête $A \to B$ « dégrossi ». Le préfaisceau d'enquête 5.2 représente donc pour l'enquêteur un instrument d'*extrapolation*, c'est-à-dire un instrument qui permet d'inférer un état d'enquête postérieur, à partir d'un état d'enquête antérieur considéré (et d'un raffinement d'enquête).

Mais l'approche duale est également digne d'intérêt pour l'enquêteur. À partir d'un jugement de typage $A \underset{g}{\Longrightarrow} B$, il peut considérer le raffinement $F \sqsubset B$. Il applique alors le jugement de typage $\underset{g}{\Longrightarrow}$ de façon à compléter le carré commutatif 5.6, qui représente un *pullback* (un produit fibré).

$$\begin{tikzcd} g^*F \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathbf{p}"'] & F \arrow[d, "\mathbf{p}"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

FIGURE 5.6 – Déduction d'un jugement de typage comme *pullback*

Et, de la même façon, il peut explorer les raffinements des jugements de typage en considérant tous les raffinements α tels que $\mathbf{p}(\alpha) = g$. Dans ce cas, il considère le préfaisceau

$$E^- : (g, F) \mapsto \{\alpha | E \overset{\alpha}{\underset{g}{\Longrightarrow}} F\}. \tag{5.3}$$

Dans ce cas, l'enquêteur exploite le raffinement $F \sqsubset B$ pour trouver l'état d'enquête E qui raffine l'état A. Autrement dit, ce raffinement lui sert à envisager les différents états d'enquêtes antérieurs E ayant conduit à l'état d'enquête postérieur F. Le préfaisceau d'enquête 5.3 représente donc ici un instrument de *vérification*, en ce qu'il permet de vérifier un état d'enquête postérieur considéré, à partir d'un état d'enquête antérieur qui l'y conduit.

5.2.4 La dualité

Afin de mettre en évidence la dualité de cette représentation de l'enquête, nous devons ajouter quelques définitions complémentaires, toujours tirées de Melliès et Zeilberger [130].

Définition 91. *Soit $B \in \mathcal{D}$ un type. On introduit la catégorie $\mathcal{B}^+$ dont :*

- *les objets sont les couples $(E \sqsubset A, f : A \to B)$;*
- *les morphismes $(E_1, f_1) \to (E_2, f_2)$ sont les dérivations $E_1 \overset{\alpha}{\underset{e}{\Longrightarrow}} E_2$, où $f_1 = e \circ f_2$.*

Par extension, Melliès et Zeilberger montrent que l'affectation $B \mapsto \mathcal{B}^+$ se généralise en un foncteur $(-)^+ : \mathcal{D} \to \mathcal{C}at$, et que l'affectation $(F \sqsubset B) \mapsto (\mathcal{B}^+, F^+)$ se généralise en un foncteur $(-)^+ : \mathcal{C} \to \mathcal{P}sh$. Le couple de foncteurs $(-)^+ : \mathcal{D} \to \mathcal{C}at$ et $(-)^+ : \mathcal{C} \to \mathcal{P}sh$ définissent alors un carré commutatif s'interprétant comme un *plongement du système de raffinement* $\mathbf{p}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "(-)^+"] \arrow[d, "\mathbf{p}"'] & \mathcal{Psh} \arrow[d, "\mathbf{u}"] \\ \mathcal{D} \arrow[r, "(-)^+"'] & \mathcal{Cat} \end{tikzcd}$$

(a) Comme carré commutatif

$$\frac{E \underset{f}{\Longrightarrow} F}{E^+ \underset{f^+}{\Longrightarrow} F^+}\ (-)^+$$

(b) Comme règle de typage

FIGURE 5.7 – Plongement du système de raffinement $\mathbf{p}$ dans $\mathbf{u}$

Le foncteur $\mathbf{u} : \mathcal{Psh} \to \mathcal{Cat}$ peut s'interpréter comme un foncteur de projection de la catégorie $\mathcal{Psh}$ des préfaisceaux dont les objets sont les couples $(\mathcal{A}, \mathbf{E})$, où $\mathcal{A}$ est une catégorie et $\mathbf{E} : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{Ens}$ un préfaisceau contravariant sur $\mathcal{A}$, et dont les morphismes $(\mathcal{A}, \mathbf{E}) \to (\mathcal{B}, \mathbf{F})$ sont les couples de foncteurs $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $\alpha : \mathbf{E} \Rightarrow (f; \mathbf{F})$, vers la catégorie $\mathcal{Cat}$ dont les objets sont des catégories, et dont les morphismes sont des foncteurs.

Le plongement du système de raffinement énonce qu'il existe une transformation naturelle entre les raffinements des jugements de typage (le jugement $E \Rightarrow F$ raffinant le jugement $A \Rightarrow B$), vers les préfaisceaux E^+ et F^+ associés aux états E et F. Autrement dit, partant d'un état d'enquête postérieur F, il est équivalent de chercher d'abord son antécédent non raffiné B puis de chercher la catégorie $\mathcal{B}^+ \in \mathcal{Cat}$ des pas d'enquête $A \underset{f}{\Longrightarrow} B$ munis du raffinement $E \sqsubset A$ tels que $F \sqsubset B$, ou de chercher d'abord la catégorie $(\mathcal{B}^+, F^+) \in \mathcal{Psh}$ des pas d'enquête $E \overset{\alpha}{\Longrightarrow} F$ puis celle des pas d'enquête $A \Rightarrow B$ munis du raffinement $E \sqsubset A$. Ce que dit 5.7 [11], c'est que la dérivation d'un jugement de typage peut se comprendre de façon équivalente soit à partir des jugements de typage compatibles avec l'état d'enquête postérieur considéré, soit à partir des raffinements des états d'enquête antérieur menant aux états d'enquête postérieurs.

Cette importante propriété de commutativité assure à l'enquêteur qu'il peut explorer les ramifications de l'enquête (i.e. les états d'enquête F provenant d'un jugement de typage ayant E pour état d'enquête antérieur) en passant par les ramifications de l'enquête déjà explorées à l'état non raffiné. Mieux elle lui assure que les ramifications de l'enquête sont complètement déterminées par les raffinements $\alpha \sqsubset f$ ($\alpha = \mathbf{p}^{-1}(f)$).

Dualement, nous pouvons raisonner sur la catégorie $\mathcal{A}^- := (\mathcal{A}^+)^{op}$.

Définition 92. *Soit $A \in \mathcal{C}$ un type. On introduit la catégorie $\mathcal{A}^-$ dont :*

- *les objets sont les couples $(g : A \to B, F \sqsubset B)$;*
- *les morphismes $(g_1, F_1) \to (g_2, F_2)$ sont les dérivations $F_1 \overset{\alpha}{\underset{h}{\Longrightarrow}} F_2$, où $g_1 \circ h = g_2$.*

Cette catégorie duale conduit au carré commutatif s'interprétant comme un plongement du système de raffinement $\mathbf{p}^{op}$.

11. Qui n'est pas à proprement parler un plongement de Yoneda. Comme le montre le corollaire 2 (*cf supra*, chap. 2), un plongement de Yoneda associe à tout objet $X \in \mathcal{C}$ le préfaisceau représentable associant à tout autre objet $A \in \mathcal{C}$ le **Hom**-ensemble des morphismes de A vers X : $Y(X) : \mathcal{C}^{op} \overset{Hom(-,X)}{\longrightarrow} \mathcal{Ens}$. Mais il est facile de retomber sur la version classique du plongement de Yoneda en assimilant $\mathcal{D}$ à la catégorie terminale *1*.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{op} \arrow[r, "(-)^-"] \arrow[d, "\mathbf{p}^{op}"'] & \mathcal{P}sh \arrow[d, "\mathbf{u}"] \\ \mathcal{D}^{op} \arrow[r, "(-)^-"'] & \mathcal{C}at \end{tikzcd}$$

(a) Comme carré commutatif

$$\frac{E \underset{f}{\Longrightarrow} F}{F^- \underset{f^-}{\Longrightarrow} E^-}\,(-)^-$$

(b) Comme règle de typage

FIGURE 5.8 – Plongement du système de raffinement $\mathbf{p}^{op}$ dans $\mathbf{u}$

On aperçoit alors une dualité formelle entre les plongements des systèmes de raffinement $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}^{op}$ dans $\mathbf{u}$. En effet, ces plongements peuvent être respectivement considérés comme des généralisations des plongements de Yoneda et de co-Yoneda [12]. Or, comme l'établit la définition 68 (*cf. supra*, chap. 2), les plongements de Yoneda et de co-Yoneda définissent précisément une dualité d'Isbell, c'est-à-dire l'adjonction

$$[\mathcal{C}, \mathcal{E}ns]^{op} \leftrightarrows [\mathcal{C}^{op}, \mathcal{E}ns].$$

La dualité d'Isbell définit finalement les catégories de préfaisceaux comme des espaces de quantité et des quantités d'espaces. Du plongement de $\mathbf{p}$ dans $\mathbf{u}$ vers le plongement de $\mathbf{p}^{op}$ dans $\mathbf{u}$, la dualité d'Isbell définit une quantité d'espaces de ramification (un spectre) ; du plongement de $\mathbf{p}^{op}$ dans $\mathbf{u}$ vers le plongement de $\mathbf{p}$ dans $\mathbf{u}$, elle définit un espace de quantité de ramification (un sondage ou un « cospectre »). Le spectre donne l'intuition de l'espace des pas d'enquête plus généraux ouvert par un simple pas d'enquête d'enquête, quand on ajoute un raffinement d'enquête, tandis que le sondage donne l'intuition de la quantité de sous-pas d'enquête contenu dans un pas d'enquête principal, quand on ajoute un raffinement d'enquête.

Ce que dit la dualité d'Isbell, c'est que ces deux intuitions sont inverses l'une de l'autre. Penser la ramification de l'enquête comme espace d'enquête antérieur E^+ ouvrant sur un espace d'enquête postérieur F^- est l'inverse de penser la ramification de l'enquête comme quantité de pas d'enquête partant d'un état d'enquête antérieur E pour arriver à un pas d'enquête postérieur F. La dualité d'Isbell permet à l'enquêteur d'opter pour deux manières de construire son enquête, soit en explorant systématiquement les chemins menant d'un état d'enquête à un autre, soit en explorant systématiquement les états d'enquête compatible avec un pas d'enquête principal donné. La première méthode est introspective et privilégie les inférences liant les états d'enquête, le donné de l'enquêteur étant les états d'enquête. La seconde méthode est extrospective et privilégie la découverte des états d'enquête depuis une inférence donnée. Chacune des méthodes fait potentiellement usage d'une dialectique entre le général et le particulier. On rappelle en effet que les raffinements d'enquête proviennent de l'apport de nouveaux prédicats dans l'enquête, qui traduisent soit de nouvelles hypothèses d'enquête (des propositions générales) soit de nouveaux champ d'investigation de l'enquête. Mais rappelons aussi que les raffinements d'enquête sortent de la mathématique de l'enquête.

12. Ou comme des plongements de Yoneda et de co-Yoneda ordinaires si $\mathbf{p} = !_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to 1$.

5.3 Au delà de la mathématique de l'enquête

5.3.1 L'art de l'enquête

Ce chapitre a présenté une réinterprétation libre de la théorie de l'enquête de Dewey. Il faut souligner que, si cette réinterprétation est utile, la représentation faisceautique de l'enquête ne couvre qu'une partie de la théorie de l'enquête. Puisque cette dernière est une méthode de découverte, son répertoire s'étend au delà des mathématiques ou des systèmes déductifs. Notre interprétation a, nous semble-t-il, le mérite d'isoler ce qui, dans la logique de Dewey, est du ressort de la méthode démonstrative (de la déduction dirons-nous) et ce qui est du ressort de la méthode heuristique. La théorie des faisceaux est utile pour comprendre comment l'enquêteur teste les hypothèses d'enquête, non la façon dont ces hypothèses sont construites. Si le test échoue, c'est-à-dire si aucun suspect ne passe le test, l'enquêteur doit ajouter quelque chose à l'enquête (de nouvelles hypothèses, de nouveaux suspects), et ce quelque chose n'est pas formalisable dans la théorie faisceautique présentée ici. Ce quelque chose appartient à l'art de l'enquête.

C'est ici qu'intervient la vision organique, d'inspiration darwinienne, de Dewey. Les hypothèses d'enquête sont en concurrence les unes avec les autres pour trouver un témoin logique. L'enquêteur doit se servir des liens qui maillent les hypothèses existantes (faisceaux, cofaisceaux), pour formuler d'autres hypothèses, ramifier l'enquête. Cet art de l'enquête fait probablement usage des notions de sondage et de spectre, c'est-à-dire respectivement des notions de vérification et d'extrapolation, mais selon une alchimie propre au contexte « matériel » de l'enquête. La « logique » de l'enquête relève donc bien d'un raisonnement global combinant des inférences mathématisables ou logicisables, et des inférences heuristiques non mathématisables.

5.3.2 Une philosophie du problème

Lorsque Dewey dénonçait la fétichisation[13] (*hypostatization*) de la théorie de la connaissance, il s'attaquait à la méthode démonstrative, ontologiquement essentialiste. La méthode transcendantale de Kant n'échappe pas à sa critique. En effet, contrairement à l'entendement, qui possède deux canons (la logique générale dans son usage formel et l'analytique des principes dans son usage transcendantal), la raison pure ne possède pas de canon en propre. Son usage formel n'est pas différent de celui de l'entendement ; quant à son usage transcendantal, Kant s'en remet à une simple « discipline de la raison pure » : la critique de la raison pure par elle-même. Donc, il n'y a pas vraiment chez Kant, au delà de l'analytique, de canon en tant qu'usage légitime d'une faculté.

C'est contre cette division forcée — un canon pour l'analytique, un organon pour la méthode — que Dewey a échafaudé sa théorie de l'enquête. Pour y parvenir, il promeut un autre renversement. Alors que la théorie kantienne est toujours une théorie de la connaissance, ce sont les méthodes de recherche qui, pour Dewey (avant Bachelard), doivent précéder la connaissance. Ceci est valable pour la philosophie du problème comme pour la pédagogie du problème : les méthodes d'apprentissage précèdent le savoir acquis. Ce sont les processus qui doivent se retrouver au centre de la philosophie du problème.

13. Voir Fabre [52], p. 37

Mais ce qui vaut pour le développement de la pensée scientifique vaut également pour les méthodes d'apprentissage. La philosophie du problème est également une philosophie de l'interaction pédagogique, c'est-à-dire une *pédagogie du problème*. Cette pédagogie se traduit par la complicité maître-élève, qui est déjà au coeur de l'épistémologie deweysienne (et après dans l'épistémologie bachelardienne, avec une autre philosophie en toile de fond). Dewey insistaient déjà sur le fait que l'école devait retrouver le sens de la problématicité. Ce sens de la problématicité renvoie nécessairement à un sens de l'implicite. L'implicite n'est jamais un donné ; il pose question, demande réflexion, sollicite un exercice dialectique, un sens de l'enquête.

Ce rapport à la dialectique nous donne l'occasion de remettre à l'ordre du jour les *Topiques* d'Aristote [14]. Traditionnellement, les *Topiques* ont tendance à être dévalués dans l'*Organon* [15]. Ce faisant, on a fini par oublier le sens de la problématisation. Où est passée la profondeur de champ des analyses de la scolastique médiévale, qui prenait soin de distinguer la *Pars Inventiva* de la *Pars Iudicativa* ? La théorie de l'enquête plaide selon nous clairement pour un retour en grâce de la première, qu'accréditent également certaines relectures fouillées des *Topiques*.

5.3.3 Une philosophie de l'action

Dewey est parfaitement conscient du caractère révolutionnaire de ce recentrage. Il n'hésitera pas à parler, à son propos, de « découverte la plus révolutionnaire jamais faite » [16]. Ce primat des relations, qui peut s'interpréter comme celui de l'action, est notamment l'un des grands acquis du pragmatisme anglo-saxon. En cela Dewey est un grand héritier de Peirce. Du reste, après Dewey, les États-Unis et le Royaume-Uni resteront les terres d'élections par excellence de la pensée de l'action. On pense naturellement à Rorty en philosophie, mais aussi à Peacock en mathématique. Il faut souligner à quel point, en 1830, l'algèbre symbolique de Peacock [142] représenta une rupture épistémologique en ce qui concerne le rôle central de l'action — des *opérations* — et sa totale indépendance vis-à-vis de l'essence des objets manipulés, considérée comme arbitraires. De ce point de vue, le calcul des idées de Boole [21] peut être vu comme l'aboutissement de cette théorie de l'opératoire. Après Peacock et Boole, cette attitude sera prolongée et commentée par Hankel, qui réaffirmera l'importance de la pureté du calcul et son primat par rapport à l'essence des objets, puis par Whitehead. Mais c'est avec la théorie des catégories, fondée par Eilenberg et Mac Lane en 1942, que le primat de l'action connaitra son expression la plus

14. On trouve en effet dans les *Topiques* des passages d'une étonnante modernité sur l'importance de bien poser les problèmes pour bien y répondre : « Si donc on ne veut pas rendre la question plus difficile, il faut poser la thèse, et si l'on peut raisonner par des principes plus connus, il ne faut pas la poser. [...] Il est donc évident qu'il ne faut pas indifféremment poser la thèse, selon qu'on interroge ou qu'on enseigne. Quant à la réponse, il faut fixer d'abord ce que doit faire celui qui répond bien, de même que ce que doit faire celui qui interroge bien. Il faut que celui qui interroge pousse la discussion, de manière que celui qui répond lui réponde les choses les plus insoutenables possible, d'après les données nécessaires de la question. Et celui qui répond doit faire en sorte que ce qu'il dit d'impossible ou de paradoxal paraisse venir, non pas de lui, mais de la question même ; car c'est peut-être une erreur toute différente de poser d'abord ce qui ne doit pas être posé, et de ne pas défendre comme il faut ce qui a été posé. » [4], chap. III et chap. IV.

15. Par exemple, on a pu dire que « l'analytique annule les Topiques » (Solmsen cité par Weil [190], p. 286).

16. (Dewey [45], p. 260-261, cité dans Fabre [51] p. 172,)

aboutie [17].

C'est dans ce contexte historique qu'il faut évaluer l'apport de Dewey. Comme l'une des premières — sinon la première — philosophies / pédagogies du problème, en tant que philosophies / pédagogies processuelles de la problématisation.

17. Dans la théorie des catégories, plutôt que de noter ${}^{A}x^{B}$ un élément typé à gauche A et à droite B, on le note $A \xrightarrow{x} B$. Plutôt que de noter la composition ${}^{A}x^{BB}y^{C}$, où le type droit de x doit être identique au type gauche de y, on note $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C = A \xrightarrow{y \circ x} C$; on réinterprète ainsi les éléments comme des actions — des flèches — transformant les types. Mais cette écriture a aussi le mérite de mettre l'accent sur les types, et ainsi de montrer que la théorie des catégories est une extension de la théorie des ensembles : on ne compose pas x et y impunément sans regarder leurs types.

Chapitre 6

Conclusion

Contents

Riassunto

La conclusione chiude la tesi con alcune osservazioni. Torniamo indietro ai poteri della dualità di Isbell e le situazioni spazio-azione corrispondenti. Sul piano epistemologico, apriamo un dibattito sul concetto di ostacolo epistemologico di Bachelard. Sul piano euristico, sottolineiamo la necessità di non perdere di vista il contenuto teorico delle situazioni spazio-azione, perche quest'ultime sono solo un quadro per lo sviluppo del discorso scientifico, né più né meno. Infine, sul piano ontologico, dedichiamo attenzione ad alcuni aspetti kantiani e hegeliani della tesi.

Résumé

La conclusion referme la thèse sur quelques remarques. On revient sur les puissances de la dualité d'Isbell et des situations espace-action correspondantes. Sur le plan épistémologique, on ouvre un débat sur la notion bachelardienne d'obstacle épistémologique. Sur le plan heuristique, nous insisterons sur la nécessité de ne pas perdre de vue le contenu théorique des situations espace-action, car ces dernières ne sont que le cadre de développement du discours scientifique, ni plus ni moins. Enfin sur le plan ontologique, nous consacrerons quelques développements sur les aspects kantiens et hégéliens de la thèse.

Abstract

The conclusion closes the thesis on some remarks. We come back to the powers of Isbell duality and to the corresponding space-action situations. On the epistemological plan, we open a debate on the Bachelardian notion of epistemological obstacle. On the heuristic plan, we emphasize the importance of content in space-action situations, because the space-action situations are only the framework for the development of scientific discourse, no more no less. Finally, on the ontological plan, we devote some remarks on the Kantian and Hegelian aspects of the thesis.

Nous ouvrions ce volume par un plaidoyer pour les trois puissances des situations espace-action : épistémologique, heuristique et ontologique. Pour conclure, nous complétons ce plaidoyer par des ouvertures permettant d'éclairer leur portée et leurs limites respectives.

6.1 Sur la notion d'obstacle épistémologique

Dans les années 30, Bergson nous invitait à ne pas se contenter de simplement résoudre les problèmes, mais de *problématiser*[1]. L'histoire des sciences montre *de facto* que les grands problèmes n'ont été véritablement posés que lorsqu'une solution semblait réellement à portée de main. Pourtant, les problèmes étaient *déjà* posés, mais *mal* posés ; ils étaient comme en attente d'une reproblématisation plus ou moins radicale. Nous donnions ailleurs ([184]) trois exemples marquants de reproblématisations : la naissance de l'algèbre moderne sous l'impulsion de Abel et Galois, la philosophie transcendantale introduite par Kant puis complétée par Maïmon, et la théorie du choix rationnel finalement débrouillée par l'axiomatique de Savage. Bien que ces exemples n'exhibent pas de situation espace-action, ils montrent comment la science a pu se sortir (parfois héroïquement) d'un problème mal posé, réalisant la « catharsis intellectuelle et affective » implorée par Bachelard.

Dès 1934, Bachelard [13] parlait de la nécessité d'approfondir la notion d'*obstacle épistémologique* pour donner sa pleine valeur à la pensée scientifique et à son histoire. La notion d'obstacle épistémologique est multiple et transdisciplinaire. On a pu distinguer les obstacles proprement heuristiques (liés à la simple finitude du savoir acquis), les obstacles ontogénétiques (la pensée spontanée que Bachelard nommait le « sens commun »), les obstacles didactiques (liés à l'académisme du système éducatif), ou encore les obstacles culturels (véhiculés plus généralement par l'environnement sociétal et culturel). Dans ce cadre, nous pensons que la rupture paradigmatique menant à $\mathfrak{P}_3$ représente un obstacle épistémologique. Bien qu'il soit difficile de démêler les composantes d'un obstacle épistémologique (tant il s'agit bien souvent d'une savante alchimie de causes), nous pensons avant tout à un obstacle heuristique et ontogénétique.

Un obstacle heuristique d'abord. Il faut souligner que $\mathfrak{P}_3$ ne se laisse deviner — pour l'instant — que dans une infime partie de la recherche scientifique. Il commence à peine à être saisi comme agglomération de résultats mathématiques partageant la même démarche conceptuelle. Même si cette agglomération gagne de nouveaux territoires, elle reste encore très fragmentaire. Il n'est donc pas surprenant que $\mathfrak{P}_3$ ne soit pas encore mis à profit (consciemment ou non) dans d'autres disciplines mathématisées. Nous dirons, pour reprendre une dialectique déjà utilisée dans ce volume, que $\mathfrak{P}_3$ commence tout juste à être mûr pour une véritable exploitation, après une longue période d'exploration en couches profondes.

Du même coup, $\mathfrak{P}_3$ pose un obstacle ontogénétique. Il faut ici insister sur le

1. « La vérité est qu'il s'agit, en philosophie et même ailleurs, de trouver le problème et par conséquent de le poser, plus encore que de le résoudre. Car un problème spéculatif est résolu dès qu'il est bien posé. [...] Mais poser le problème n'est pas simplement découvrir, c'est inventer. La découverte porte sur ce qui existe déjà, actuellement ou virtuellement ; elle était donc sûre de venir tôt ou tard. L'invention donne l'être à ce qui n'était pas, elle aurait pu ne venir jamais. Déjà en mathématique [...] l'effort d'invention consiste le plus souvent à susciter le problème, à créer les termes en lesquels il se posera. Position et solution du problème sont bien près ici de s'équivaloir : les vrais grands problèmes ne sont posés que lorsqu'ils sont résolus. » [18]

renversement existentialiste opéré par $\mathfrak{P}_3$, qui implique une sérieuse remise en question des schèmes d'intelligibilité usuels. Dans la mesure où l'épistémologie kantienne est déjà loin d'être oecuménique, il faut bien admettre que $\mathfrak{P}_3$, qui radicalise un peu plus l'idéalisme kantien (*cf. infra*, 6.3 Sur le caractère hégélien de la dualité d'Isbell, voir également chap. 6), représente un premier obstacle d'importance. Le passage de la fabrication des outputs de la machine à la fabrication de la machine elle-même fait passer d'un énoncé essentialiste du type « Voici comment j'explique cette machine » à un énoncé existentialiste du type « Voici comment je peux concevoir cette machine si j'envisage telle situation ». La situation, i.e. les conditions de conception de la machine, est donc questionnée, ce qui oblige un effort critique permanent. Suis-je bien certain d'avoir choisi les bons composants élémentaires de la machine (qui sont des fonctions) ? Suis-je bien conscient que la machine tire sa signification de l'assemblage de ces composants élémentaires (i.e. du recollement des fonctions).

Finalement, par la force des choses, $\mathfrak{P}_3$ représente aussi un obstacle didactique et culturel. Simplement parce qu'un savoir qui va à l'encontre du « bon sens » ne peut pas faire école, et, par suite, parce qu'un savoir qui ne fait pas école ne peut pas être diffusé par le système éducatif, sociétal, culturel.

6.2 Sur la vacuité théorétique des situations espace-action

En introduction, nous mettions en garde contre l'usage superficiel des concepts-valises. Nous voudrions revenir sur cet aspect en évoquant le danger de considérer la dualité d'Isbell comme un concept prêt à l'emploi. Si, comme nous pensons l'avoir démontré, la dualité d'Isbell est un concept fécond permettant d'embrasser un large spectre de situations espace-action, tout reste à faire sur le plan de la construction du contenu théorique. La dualité d'Isbell offre certaines garanties pour ce qui est du bienfondé métathéorique, en ce qu'il crée les conditions d'une situation espace-action bien pensée, mais en aucun cas il n'est un gage de bienfondé pour la théorie elle-même. En bref, la dualité d'Isbell est bien le témoin d'un contenu formel, mais lequel ?

Pour s'en convaincre, reprenons l'exemple offert par la logique. Il est à noter que, avant Girard, la logique disposait déjà d'arguments pour envisager la syntaxe et la sémantique sous l'angle de la dualité d'Isbell. Rappelons en effet que la dualité de Stone originale met déjà en dualité la logique propositionnelle classique et leurs classes de modèles, c'est-à-dire la syntaxe et la sémantique au sens de la théorie des modèles. Comme l'avait vu Stone (*cf. supra*, chap. 2), cette dualité peut d'ailleurs être étendue en topologisant les classes de modèles, de façon à retrouver la logique propositionnelle du premier ordre, à partir de l'espace des modèles. Mais ce qui est important est de savoir de quoi la dé-essentialisation correspondante est le nom. Puisque la syntaxe et la sémantique sont réunies au sein d'un même objet faisceautique, il y a bien une dé-essentialisation du tout sémantico-syntaxique (dont les pôles s'interfécondent). Cependant, que peut-on tirer d'une telle dé-essentialisation lorsque le pôle sémantique n'est en réalité qu'un métalangage ? À l'évidence que tout était déjà consigné dans la pétition de principe initiale (le métalangage). Or, telle est bien la situation de la théorie des modèles, qui superpose la dualité formelle syntaxe *vs* sémantique avec une dualité artificielle langage-objet *vs* métalangage [2], si bien que la seconde phagocyte

2. L'interrogation est d'ailleurs valable pour tout métalangage en général, qu'il soit naturel

la première. On obtient alors une forme dégénérée d'existentialisme dans laquelle aucun objet transcendantal n'est produit, aucune identité n'est *construite*.

Tel n'est plus le cas si les pôles de la dualité proviennent d'un même langage, comme c'est le cas dans le projet girardien de « dualité moniste » [69]. Dans ce cas, les pôles de la dualité sont transcendés en un objet supérieur, en une « syntaxe transcendantale » [70] [71].

Notons que cela ne veut pas dire que la sémantique classique (issue de la théorie des modèles) est inappropriée dans l'obsolu. Elle n'est inappropriée que dans la mesure où l'ambition est d'apporter quelque enseignement sur la nature des objets logiques. Elle reste appropriée si l'ambition est en deçà de la (philosophie de la) logique. Par exemple, si l'ambition est plus modestement de construire une ontologie de données, une dualité syntaxe-sémantique traditionnelle fait parfaitement l'affaire, car l'ambition est simplement de modéliser un ensemble de connaissances dans un domaine donné (sans s'interroger sur la construction des données-comme-entités proprement dites). Prenons l'exemple de l'ontologie du web (qui est une ontologie de données numériques). Alors que le web 2 dit « sémantique » décrit les pages et les liens entre elles, le web 3 dit « ontologique » a pour but de décrire les métadonnées incorporées dans les pages web, en prenant en compte les relations hiérarchiques entre les données (leur taxonomie), de façon à décrire un réseau de « concepts ». Comment construire une telle ontologie ? Certainement avec des réquisits préalables comme la clarté des données, leur cohérence, leur extensibilité, leur fidélité, ou encore leur neutralité. Pour y parvenir, on saisit alors la pertinence de créer explicitement une situation espace-action, de façon à recoller adéquatement les données du réseau. On voit bien que, dans ce cadre, les données ne sont pas à concevoir (elles sont déjà-là) mais à organiser dans un réseau de concepts, i.e. un réseau « ontologique ». L'ontologie fait donc ici référence aux concepts dégagés de la structure des données (i.e. au réseau taxonomique), et non aux données elles-mêmes. Plutôt que de présupposer une taxonomie *a priori*, on la dégage de façon *a posteriori*, i.e. constructive.

Ces exemples nous montrent que la dualité d'Isbell ne fait rien en elle-même ; elle ne tire sa force constructive dé-essentialisante que dans la situation dans laquelle elle est plongée. La dualité d'Isbell est un assistant de théorisation, non une théorie.

6.3 Sur le caractère pré-hégélien de la dualité d'Isbell

Dans le passage de $\mathfrak{P}_2$ à $\mathfrak{P}_3$, on passe de l'énoncé essentialiste (« Voici comment j'explique cette machine ») à l'énoncé existentialiste (« Voici comment je peux concevoir cette machine si j'utilise tels composants »). Ce passage est clairement kantien. Mais la dualité d'Isbell en dit plus. L'adjonction représente quelque chose de pré-hégélien. *Pré*-hégélien seulement car l'idée de dual algébrique (ou dual géométrique) ne suppose en aucune manière un « non-être » ; elle ne représente pas le dual comme virtualisation d'un être (qui possèderait en lui la détermination de l'être dont il provient). La dualité d'Isbell met bien plutôt en jeu deux visages d'un même être, la dialectique de l'abstrait et du concret se substituant à celle de l'être et du non-être. La dualité d'Isbell nous invite ainsi à généraliser la dialectique, dans le sens où le principe d'opposition (présent dans le couple thèse-antithèse) laisse place au concept

(Salisbury, Abélard, Occam) ou symbolique (Cercle de Vienne : Carnap, Tarski...).

plus souple de dualité (ici entre axiomatisation et représentation).

Le caractère pré-hégélien de la dualité d'Isbell se laisse alors résumer par le triple principe de conservation / cessation / élévation : (i) conservation de l'identité de l'objet dans sa représentation / axiomatisation [3] ; (ii) cessation de son mode d'accès (géométrique / algébrique) ; (iii) élévation à une réalité plus profonde (l'objet transcendantal). À l'instar de la dialectique de Hegel, qui interdit de séparer le positif du négatif et de faire du négatif quelque chose qui existe de façon autonome, la dualité d'Isbell interdit de séparer les catégories duales — géométrie / algèbre, espace / action, concret / abstrait. Ces catégories font partie d'un tout qui les transcende.

C'est donc dire que notre posture dépasse le transcendantalisme kantien. En effet, Kant fait déborder l'étude des conditions de possibilité de l'entendement sur le terrain étranger de la sensibilité. Cette dualité entre sensibilité et entendement apparait du même coup sous les oripeaux du doublet langage objet / métalangage [4]. Comme l'a bien vu Deleuze, « Une telle dualité nous renvoyait au critère extrinsèque de la constructibilité, [...] d'où la réduction de l'instance transcendantale à un simple conditionnement, et le renoncement à toute exigence génétique » ([38], p. 224-225). Pour faire du transcendantalisme kantien une révolution copernicienne pure, il fallait surmonter l'hétérogénéité kantienne et internaliser la sensibilité comme fonction de l'entendement [5], exactement comme il fallait internaliser la sémantique comme fonction de la syntaxe.

En creux, notre thèse défend par conséquent Hegel contre Kant, puisqu'elle accrédite l'idée qu'une telle internalisation est légitime. Contre Kant, Hegel soutient que nos capacités subjectives sont responsables non seulement de la façon dont on synthétise un contenu donné mais, de manière plus radicale, de la façon d'articuler la structure même de ce contenu, son *être*. D'après cette conception, la tâche de déterminer ce qui peut être le contenu d'une connaissance (ontologie) ne se distingue plus de celle de déterminer comment nous mettons en relation les contenus conceptuels (logique) : « La véritable nature des choses est un seul et même contenu » (Hegel [86], p. 13). Cette affirmation de Hegel est expressément adressée contre Kant, pour qui, au contraire, « user de la logique comme d'un organon pour produire réellement, du moins en en donnant l'illusion, des affirmations objectives, [c'est] en fait [en] abuser » ([102], p. 819).

Pour Hegel, ce que Kant a montré, c'est que l'objectivité a des conditions subjectives. La philosophie de Kant est transcendantale en ceci qu'elle porte sur l'objectivité, et non sur l'objet. Sur ce point Hegel rejoint Kant. Lui aussi vise un programme transcendantaliste. Mais Kant a, selon Hegel, le tort de garder la distinction de la forme et du contenu. Distinguer la forme du contenu, c'est pour Hegel la définition même de la métaphysique. Pour Hegel, la philosophie transcendantale de Kant est au mieux un programme inachevé, faute d'internaliser l'objectivité. Et elle serait au pire réactionnaire, puisqu'elle retomberait en deçà de la métaphysique classique en renonçant à l'unité de l'être et de la pensée (Parménide). Pour un hégélien, l'idée d'une philosophie à la fois tournée vers l'objectivité et tournant le dos à l'

3. Rappelons que la négation hégélienne n'infirme pas l'objet, elle affirme sa négation. Girard a proposé de distinguer, dans ce sens, réfutation et récusation du jugement ; la négation classique réfute là où la négation hégélienne récuse.

4. Ce qui soulève, outre l'insoluble problème épistémologique déjà discuté (i.e. nous n'avons qu'un langage), un problème philosophique : comment un concept peut-il s'appliquer à une intuition (question *quid juris*) ? Sur ce point la philosophie de Kant trahit un reliquat d'empirisme humien.

5. C'est Maïmon qui mènera cette révision fondamentale du programme kantien.

« être-objet » (le contenu) est pour le moins étrange, et laisse la situation comparable à un « temple privé de sanctuaire », comme l'ironise Hegel dans la préface de la *Science de la Logique* [86]. Notre thèse ne dit pas autre chose ; elle doit se comprendre comme un chantier de construction de sanctuaires d'êtres-objets.

Pour finir, nous souhaitons modérer l'hégélianisme défendue dans cette thèse. Ce que nous défendons, c'est que (i) les catégories algébriques figurant le *logos* (ou le textuel), ont des racines dans la géométrie, (ii) les catégories géométriques figurant la *morphé* (ou le visuel) ont réciproquement des racines dans l'algèbre et (iii) les contenus de connaissance bienfondés sont ceux qui sont conservés dans les va-et-vient axiomatisation-représentation et représentation-axiomatisation. Notre thèse ne défend pas une forme plus radicale d'hégélianisme, que l'on peut peut décrire comme anti-essentialiste ou « anti-fondationnaliste », qui entend construire les contenus de connaissance (les êtres-objets) *ex nihilo*. Contrairement aux anti-essentialistes, nous pensons qu'un principe de base est toujours nécessaire au fondement à la connaissance. Notre thèse propose une dualité espace-action comme fondement de connaissance, car, selon nous, un espace n'est jamais mieux compris que par les actions qu'on peut y mener, et une action n'est jamais mieux saisie que par l'espace qu'il insinue ; mais nous ne prétendons pas que cette dualité post-hégélienne représente un principe de base absolu. D'autres principes sont envisageables. Finalement notre thèse défend une forme de « fondationnalisme-cohérentisme » [6] ; les catégories d'espace et d'algèbre se justifient mutuellement (en cela la thèse soutient une forme de cohérentisme), mais un principe supérieur guide cette justification réciproque (en cela la thèse soutient une forme de fondationnalisme).

6. Pour emprunter la rhétorique de la théorie de la justification, qui nous semble à propos dans sa version appliquée à la connaissance (non aux croyances).

Annexe A

Sciences physiques

Cette annexe devait originellement constituer un chapitre à part entière de la thèse. Son objectif était de montrer comment les aspects algébriques et fonctoriels de la théorie quantique des champs (TQC) sont duaux l'un de l'autre, sur une idée de Schreiber [160]. Mais après des investigations avancées, il est apparu que cette question demande un travail d'envergure (par exemple une thèse à part entière). Nous nous contentons donc, plus modestement, d'exposer dans cette annexe la problématique, en renvoyant le lecteur aux futurs travaux qui ne manqueront pas de compléter l'état de l'art. Cette annexe est largement inspirée de Schreiber [160].

Contents

Résumé

Cette annexe aborde la dualité d'Isbell en sciences physiques, et plus précisément en théorie quantique des champs (TQC). L'une des grandes questions de la mécanique quantique est la réinterprétation de la notion d'*état*. Qu'est-ce qu'un état quantique et comment change-t-il dans le temps ? Ces questions ont donné lieu à la représentation dite d'Heisenberg, dans laquelle les opérateurs agissant sur les observables varient au cours du temps mais où les états sont indépendants du temps, et la représentation dite de Schrödinger, dans laquelle les opérateurs sont indépendants du temps mais où les états varient au cours du temps. Il existe aujourd'hui essentiellement deux approches différentes de l'axiomatisation de la TQC : l'une reformulant la représentation de Heisenberg, la TQC algébrique introduite par Haag et Kastler, l'autre reformulant la représentation de Schrödinger, la TQC fonctorielle formulée par Atiyah et Segal. Autour des années 2010, plusieurs travaux ont montré comment reconstruire la TQC algébrique à partir de la TQC fonctorielle, ouvrant la voie à une approche générale de la TQC, en termes de dualité d'Isbell.

Riassunto

Questo annesso descrive la dualità di Isbell nelle scienze fisiche, in particolare nella teoria quantistica dei campi (TQC). Uno dei principali problemi della meccanica quantistica fin dalla sua origine è la reinterpretazione del concetto di *stato* (che descrive un sistema fisico al fine di prevederlo). Che cosa è uno stato quantistico e come cambia nel tempo ? Come possiamo calcolare il suo cambiamento di stato ? Questi problemi hanno portato alla cosiddetta rappresentazione di Heisenberg, in cui gli operatori che agiscono sulle osservabili variano nel tempo, ma in cui gli stati sono indipendenti dal tempo, e alla cosiddetta rappresentazione di Schrödinger, in cui gli operatori sono indipendenti dal tempo ma dove gli stati variano nel tempo. Oggi ci sono essenzialmente due diversi approcci alla assiomatizzazione della TQC : uno che affina la rappresentazione di Heisenberg, la TQC algebrica introdotta da Haag e Kastler, l'altro che affina la rappresentazione di Schrödinger, la TQC funtoriale introdotta da Atiyah e Segal. Intorno al 2010, diversi studi mostrano come ricostruire la TQC algebrica dalla TQC funtoriale, aprendo la strada ad un approccio generale della TQC, in termini di fasci e cofasci, e alla fine in termini di dualità di Isbell.

Abstract

This annex deals with Isbell duality in physical sciences, and more specifically in quantum field theory (QFT). One of the big questions, in QFT, is the reinterpretation of the state notion (which describes a physical system in order to predict it). What is a quantum state and how does it change over time ? How can one calculate a change of state ? These issues resulted in the Heisenberg picture in which operators acting on observable change over time but where states are time-independent, and the so-called Schrödinger picture in which operators are time-independent but where states change over time. Today there are essentially two different approaches to the axiomatization of the QFT : one restating Heisenberg picture, algebraic QFT introduced by Haag and Kastler, the other reformulating Schrödinger picture, functorial QFT formulated by Atiyah and Segal. Around the 2010s, several studies have shown how to reconstruct algebraic QFT from functorial QFT, paving the way for a general approach to TQC, in terms of Isbell duality.

A.1 Premiers principes

A.1.1 Transformations de Lorentz et intervalles d'univers

En physique, un *événement* est un point de l'espace (un lieu) à un instant donné, façon de ne conserver de l'événement concret que ses coordonnées spatiales et temporelles. En mécanique newtonienne, l'événement peut être qualifié d'« absolu » dans le sens où le temps est absolu : un changement de référentiel (ou de repère) pour l'observateur implique seulement de changer les coordonnées spatiales de l'événement (comme tout changement de repère en géométrie euclidienne).

Les travaux d'Einstein [48] sur la relativité ont contraint les physiciens à réviser cette vision pour adopter des espaces à quatre dimensions d'un genre particulier : les espace-temps. Selon cette nouvelle représentation, l'événement est défini dans un espace-temps de dimension quatre. Dans ce cadre, le temps n'est plus absolu ; un changement de repère pour l'observateur implique en outre une modification de la coordonnée temporelle de l'événement. L'événement physique devient donc *relatif*, car il dépend du point de vue choisi (c'est-à-dire du mouvement de l'observateur). Il est cependant possible d'en fournir une description objective moyennant une « loi de passage » (des coordonnées spatio-temporelles). Cette loi de passage est donnée par ce que l'on appelle une *transformation de Lorentz*, qui énonce les formules permettant de transformer les coordonnées d'un événement lors d'un changement de référentiel. Les formules de Lorentz reposent sur les principes de la relativité restreinte et impliquent un certain nombre de conséquences, parmi lesquelles :

- le principe de réciprocité : le passage d'un observateur à un autre s'effectue dans chaque formule en inversant le signe de la vitesse ;
- le principe de relativité : la simultanéité des événements est relative (à l'observateur) ;
- le principe de contraction : l'observateur en mouvement perçoit l'objet observé comme contracté dans le sens de son mouvement ;
- le principe de dilatation : l'observateur attribut une durée plus longue que la durée propre aux phénomènes se déroulant dans son référentiel.

Les transformations de Lorentz ont cette conséquence remarquable que les longueurs et durées sont *invariantes* modulo une combinaison quadratique : si $A(t_A, x_A, y_A, z_A)$ et $B(t_B, x_B, y_B, z_B)$ sont deux événements dans un référentiel donné (observés en un point O), nous avons

$$\Delta s_{AB}^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2, \tag{A.1}$$

où c représente la vitesse de la lumière. Cette équation définit précisément ce que l'on appelle un *intervalle d'univers* Δs en fonction d'une durée $\Delta t_{AB} := t_B - t_A$ et d'une distance $\Delta l_{AB} := \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ séparant les événements A et B : $\Delta s_{AB}^2 = c^2 \Delta t_{AB}^2 - \Delta l_{AB}^2$.

Cette formulation permet d'identifier la relation de causalité pouvant lier les événements A et B, à travers trois genres fondamentaux d'intervalles dits *intervalles d'univers* ou *intervalles d'espace-temps* :

- $\Delta s^2 > 0$: intervalle de genre temps ;

- $\Delta s^2 = 0$: intervalle de genre lumière ;

- $\Delta s^2 < 0$: intervalle de genre espace ;

A.1.2 Espace causal et cône de lumière

Les genres d'intervalle d'univers ont alors pour conséquence que chaque événement porte en lui un *espace causal*. Dans le cas d'un intervalle de genre temps, les événements A et B peuvent être liés par une *relation causale*, dans le sens où l'un peut être la conséquence de l'autre. C'est effectivement le cas car la durée $c\Delta t$ l'emporte sur la distance spatiale Δl. Dans le cas d'un intervalles de genre lumière, les événements A et B peuvent toujours être liés par une relation causale, mais la relation se limite à la transmission de particules se déplaçant à la vitesse de la lumière (comme un signal lumineux). Enfin dans le cas d'un intervalles de genre espace, les événements A et B ne peuvent plus être liés par une relation causale, car la distance spatiale Δl excède la durée $c\Delta t$: les événement A et B sont dits *indépendants*.

Cet espace causal prend la forme d'un *cône de lumière*, dont les bords sont données par le cône de révolution d'équation $l/t = c$ (d'où le nom « cône de lumière »). Le cône de lumière permet de représenter respectivement les intervalles de genre lumière, temps et espace comme le bord, l'intérieur et l'extérieur du cône. Les intervalles de genre lumière, temps et espace sont par ailleurs croisés avec des catégories de temps absolu. Le plan d'origine O représente le présent de l'événement (puisque O représente l'événement lui-même), l'espace situé en dessous de ce plan représente son passé absolu, l'espace situé au dessus son futur absolu. Le plan horizontal agit ainsi comme séparateur entre le passé et l'avenir. Selon cette représentation, les rayons lumineux se déplacent le long du bord du cône de lumière, tandis que les objets massifs plus lents que la lumière se déplacent selon une trajectoire confinée dans le cône de lumière. Il est impossible qu'un objet décrive une trajectoire sortant du cône de lumière (puisqu'aucun objet ne peut se déplacer plus vite que la lumière).

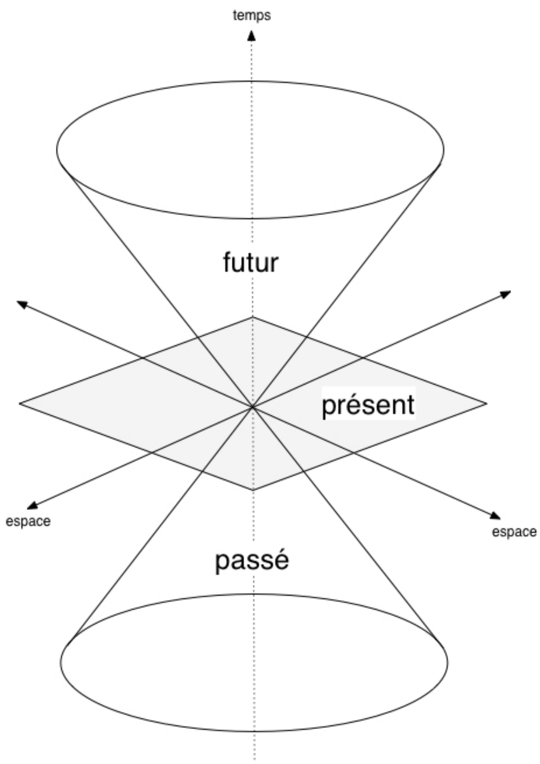


Figure A.1 – Cône de lumière d'un événement

On aura pu remarquer que les transformations de Lorentz A.1 rappellent étrangement le théorème de Pythagore. Cette remarque suggère d'interpréter le cône de lumière dans le cadre bien connu de la géométrie euclidienne, de façon à doter la structure causale de l'univers d'une métrique. Cette aspiration conduit à la notion d'espace-temps de Minkowski. Rapporté à un sytème de coordonnées spatiales selon la convention de signes (ou signature) $(+;-;-;-)$ ou $(-;+;+;+)$, A.1 peut se réécrire dans le cadre de la géométrie euclidienne usuelle. De façon canonique, en posant $x^0 := ct$, $x^1 := x$, $x^2 := y$, $x^3 := z$, A.1 peut se réécrire (en négligeant les indices) $ds^2 = \sum_{i=0j}^{3} \sum_{j=0j}^{3} \alpha_{ij} dx^i dx^j$ où (α_{ij}) est la matrice bloc $\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & -I_3 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3$. Sous cet angle, les intervalles espace-temps ne sont ainsi rien d'autre que des pseudo-métriques (des pseudo-métriques seulement car les composantes α_{ij} du tenseur métrique ne sont pas toutes positives eu égard à la signature $(+;-;-;-)$ ou $(-;+;+;+)$).

Reformulé comme espace-temps de Minkowski, l'intervalle espace-temps est alors redéfini comme espace affine de dimensions quatre avec une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur l'espace tangent à chaque point de l'espace-temps [1], avec une signature métrique $(+,-,-,-)$ ou $(-,+,+,+)$. Le reconstruction de Minkowski [133] permet donc *in fine* d'exprimer l'invariant fondamental de Lorentz (i.e. la conservation des formes quadratiques) directement dans le cadre de la géométrie euclidienne. Notons $X = \mathbb{R}^3$ l'espace euclidien équipé d'une métrique de Minkowski sur $\mathbb{R}^3$.

1. Cette forme bilinéaire est aussi appelée *produit intérieur de Minkowski.*

A.1.3 Sous-espaces causals, algèbres d'observables et propagateurs d'états

Sur cette base, il est possible de définir un *sous-ensemble causal* comme intersection de deux espaces causals, c'est-à-dire comme l'intersection du futur d'un événement et du passé d'un autre événement. Un sous-ensemble causal possède la forme d'un diamant ou d'un bicône dont les bords sont naturellement du genre lumière. Les deux cônes se coupent en une ellipse, de sorte que cette dernière suffit à reconstituer les deux cônes en présence et le diamant résultant (figure A.2).

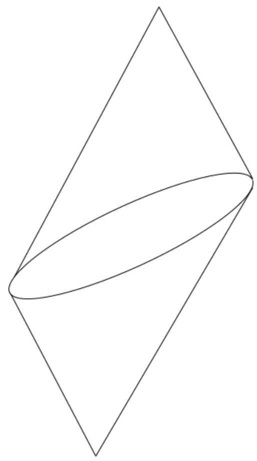
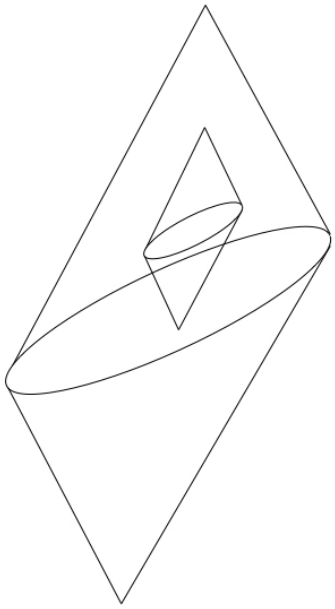


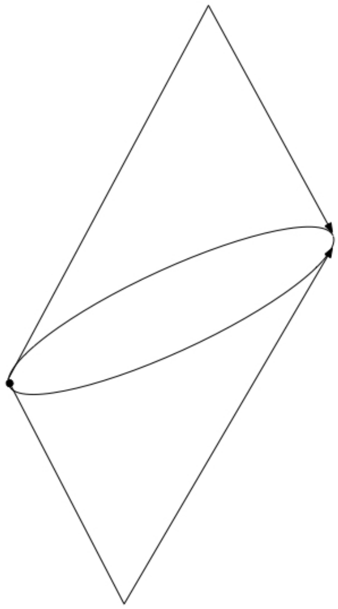
FIGURE A.2 – Sous-ensemble causal d'un espace de Minkowski à trois dimensions comme diamant causal

Sur cette base, les sous-espaces causals peuvent être considérés de deux façons différentes. La première est de les voir comme objets à part entière liés par inclusion (figure A.3a). Dans ce cas les sous-espaces causals sont vus comme un réseau de sous-algèbres. La seconde est de les voir comme l'ensemble des intervalles de genre lumière reliant les points les plus espacés du sous-espaces causal (figure A.3b).

Il se trouve que ces deux représentations sont à la base de la théorie quantique des champs. À la question de savoir qu'est-ce qu'un état quantique et comment un état quantique évolue dans le temps, les physiciens ont apportés deux réponses sensiblement différentes, l'une portant son attention sur les « observables » variant au cours du temps, l'autre portant son attention sur les « états quantiques » variant au cours du temps. La première approche utilise des réseaux d'algèbres d'opérateurs locales qui attribuent à chaque sous-espace causal une « algèbre d'observables », la seconde utilise des foncteurs qui attribuent à chaque à chaque sous-espace causal un « propagateur d'états ». Examinons plus en détail ces deux représentation de la théorie quantique des champs.



(a) comme réseau de sous-algèbres (algèbres locales)



(b) comme ensemble des intervalles de genre lumière

Figure A.3 – Deux façons de voir les sous-espaces causals

A.2 La théorie quantique des champs (TQC)

A.2.1 Algèbres d'observables *vs* propagateurs d'états

En physique, un « état » décrit la connaissance d'un système physique, comme sa position, sa vitesse ou toute autre grandeur physique, dans le but de le prévoir. Lorsque l'observateur en sait autant que possible sur le système physique, la connaissance est décrite par un « état pur ». Mais dans bien des cas, cette connaissance est incomplète. En mécanique quantique, la connaissance complète est même impossible, car les grandeurs physiques ne préexistent pas à leur mesure : les observations effectuées sur le système ont pour conséquence de perturber le système et donc de modifier leur état. Cette situation contraint le physicien à redéfinir l'état du système indépendamment des grandeurs physiques observables (appelées plus simplement observables), ce qui conduit au divorce entre l'état du système et les observables du système. Pour redonner sens à l'idée d'état, von Neumann [136] a proposé une réinterprétation en termes de « mélanges statistiques ». S'il n'est pas possible de déterminer l'état pur du système quantique, il est en revanche possible de décrire des états plus généraux, dits « mixtes », synthétisés dans une seule matrice appelée *matrice densité*, de sorte que l'ensemble de tous les états quantiques possibles d'un système physique donné à un instant donné sont résumés dans cette unique matrice. Dans ce cadre, les états purs apparaissent comme des cas particuliers d'états mixtes.

Cette dualité entre l'état du système et les observables du système a essentiellement donné lieu à deux approches différentes de la TQC [2]. Le première porte son attention sur les observables et renvoie à la représentation dite d'Heisenberg, qui s'intéresse aux opérateurs (hermitiens) décrivant la variation des observables dans le temps à

2. Nous n'oublions pas la représentation de Dirac ou représentation d'interaction, dans laquelle à la fois les kets et les observables évoluent dans le temps.

états quantiques constants. La seconde porte dualement son attention sur les états quantiques (notés dans la notation de Dirac sous la forme de kets $|\Psi\rangle_H$), et renvoie à la représentation dite de Schrödinger, qui s'intéresse aux opérateurs décrivant l'évolution des états quantiques dans le temps à observables constants.

Il faut cependant remarquer que la façon dont les physiciens ont historiquement abordé la TQC a parfois manqué de rigueur mathématique. D'un côté, comme le rappelle Schreiber (ibid), tout ce qui comptait était d'avoir des observables possédant les bonnes propriétés de causalité locale, même si les opérations régissant les observables étaient mal définies, tandis que, de l'autre, tout ce qui comptait était d'avoir des trajectoires possédant les bonnes propriétés de composition, même si les intégrales régissant les trajectoires étaient mal définies. C'est pourquoi une seconde génération de TQC dites axiomatiques a vu le jour quelques décennies plus tard, dans le but de fournir des fondements mathématiques solides, sous la forme d'ensembles précis d'axiomes. Il existe donc aujourd'hui deux approches différentes de l'axiomatisation de la TQC : l'une reformulant la représentation de Heisenberg, la TQC algébrique introduite par Haag et Kastler [81], l'autre reformulant la représentation de Schrödinger, la TQC fonctorielle introduite par Atiyah [12] et Segal [164]. La TQC algébrique se donne pour enjeu de voir les algèbres d'observables comme réseaux locaux d'algèbres d'opérateurs agissant sur les sous-ensembles causals, tandis que la TQC fonctorielle se propose d'utiliser des foncteurs pour décrire les sous-ensembles causals comme des « propagateurs d'états » respectant une loi de composition.

A.2.2 La TQC algébrique

La TQC algébrique (TQCA) repose sur les réseaux d'algèbres d'opérateurs locales formellement introduits par Haag [82] pour formaliser l'idée d'algèbre d'observables locaux (i.e. liés entre eux par une relation de causalité). Dans cette approche, les sous-ensembles causals sont vus comme les objets d'une catégorie dont les morphismes sont les inclusions de sous-ensembles causals (*cf* figure A.3a).

Définition 93 (Catégorie des sous-ensembles causals)**.** *On appelle $\mathcal{S}(X)$ la catégorie dont les objets sont les sous-ensembles causals ouverts $O \subset X := \mathbb{R}^3$ et dont les morphismes sont les inclusions $O \subset O'$.*

Deux objets O_1 et O_2 sont dit *indépendants*, ou séparés dans l'espace, si tous les couples de points $(x_1, x_2) \in O_1 \times O_2$ sont indépendants (et dans ce cas les diamants causals sont disjoints).

Définition 94 (Réseau de monoïdes locaux)**.** *Un foncteur $\mathcal{A} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{Mon}$ (de la catégorie des sous-ensembles causals vers la catégorie des monoïdes) est un réseau de monoïdes sur des espaces de Minkowski à trois dimensions si il associe à tout morphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ une injection (un monomorphisme) de monoïdes. C'est un réseau de monoïdes locaux si pour tous sous-ensembles causals indépendants $O_1, O_2 \subset O$, $\mathcal{A}(O_1)$ commute avec $\mathcal{A}(O_2)$.*

Il est également usuel de demander que l'algèbre $\mathcal{A}$ soit isomorphe à celle assignée à n'importe quel voisinage de l'une de ses surfaces de Cauchy, c'est-à-dire que pour toute surface de Cauchy d'un sous-ensemble causal O, c'est-à-dire toute trajectoire traversant O de façon monotone, et pour toute collection de sous-ensembles causals $O_i \subset O$ couvrant la surface de Cauchy (voir figure A.4), nous avons $\cup_i \mathcal{A}(O_i) = \mathcal{A}(O)$.

Cet axiome supplémentaire, appelé axiome des tranches de temps (*time slice axiom*) permet de définir la catégorie $\mathcal{TQCA}$ comme 2-catégorie[3].

Définition 95. *On appelle $\mathcal{TQCA}(\mathbb{R}^3)$ la 2-catégorie dont les objets sont les réseaux locaux satisfaisant l'axiome des tranches de temps, vus comme des foncteurs $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \to$ $\mathcal{C}at$, les morphismes des transformations naturelles entre ces foncteurs, et les 2-morphismes des modifications de ces transformations naturelles.*

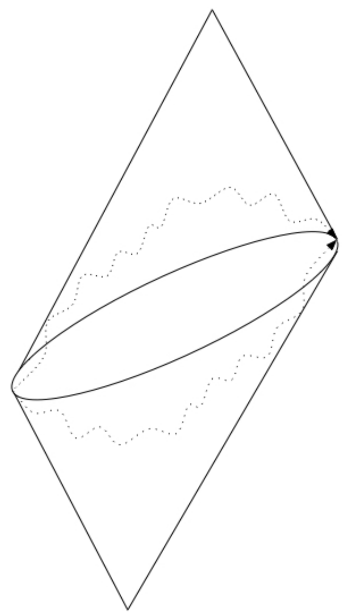


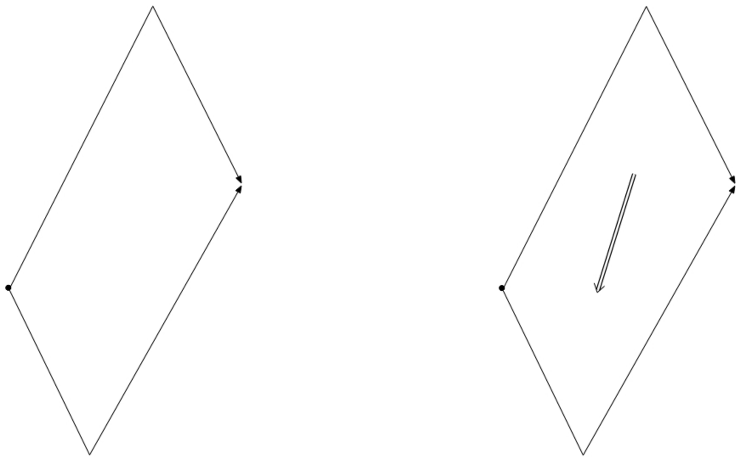
FIGURE A.4 – Tout sous-diamant causal $O_i \subset O$ tel que $\cup_i O_i$ contient les surfaces de Cauchy de O (c'est-à-dire les trajectoires qui traversent O de façon monotone).

A.2.3 La TQC fonctorielle

La TQC fonctorielle (TQCF) se propose de regarder les sous-ensembles causals comme des propagateurs d'états satisfaisant le principe de composition..

Définition 96. *Soit $P_3(\mathbb{R}^3$ la 2-catégorie dont les objets sont les points de $\mathbb{R}^3$, dont les morphismes sont les trajectoires (par morceaux) de genre lumière orientées de gauche à droite*[4]*, et dont les 2-morphismes sont générés à partir du cobord inférieur*[5] *des diamants causals formé par les morphismes.*

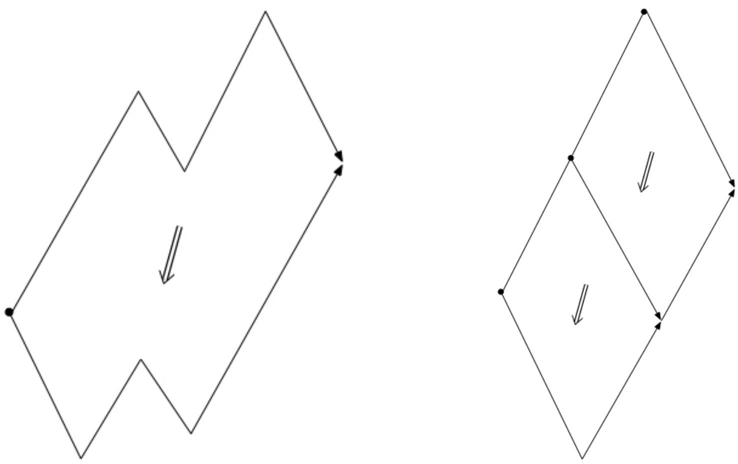
3. Se référer à 50 pour la définition d'une 2-catégorie (chap. 2).
4. Par simple convention, on pourrait alternativement choisir l'orientation opposée.
5. Par simple convention, on pourrait alternativement choisir le cobord supérieur.



(a) morphismes (b) 2-morphismes

FIGURE A.5 – Morphismes de la 2-catégorie $P_3(\mathbb{R}^3)$

En d'autres termes, les 2-morphismes sont générés à partir de la fermeture du sous-ensemble causal obtenue par recollement des trajectoires de genre lumière formés par le cobord du sous-ensemble causal. Par suite, les morphismes et les 2-morphismes se composent de façon habituelle.



(a) composition de morphismes (b) composition de 2-morphismes

FIGURE A.6 – Compositions de morphismes de la 2-catégorie $P_3(\mathbb{R}^3)$

Définition 97 (TQCF étendue)**.** *Pour tout 2-groupoïde C, une TQCF étendue sur un espace de Minkoswki à trois dimensions est un 2-foncteur $Z : P_3(\mathbb{R}^3) \to C$. On note $\mathcal{TQCT}(\mathbb{R}^3, C) := 2Fonct(P_3(\mathbb{R}^3), C)$ la 2-catégorie de 2-foncteur et $\mathcal{TQCT}_{isos}(\mathbb{R}^3, C)$ le 2-groupoïde stricte maximal de $\mathcal{TQCT}(\mathbb{R}^3, C)$.*

A.3 Vers une dualité isbellienne $\mathcal{TQCA} \leftrightarrows \mathcal{TQCF}$

L'idée de Schreiber est que la TQCA et la TQCF sont liés par une dualité de type isbelienne, c'est-à-dire qu'il doit être possible de lier les catégories $\mathcal{TQCA}$ et $\mathcal{TQCF}$ par une dualité d'Isbell ou éventuellement par une généralisation qu'il conviendrait de définir. Schreiber apporte une première pierre à cette question en montrant comment la TQCA peut être exprimée à partir de la TQCF (étendue).

Définition 98. *Étant donné une TQCF étendue, i.e. un 2-foncteur $Z : P_3(\mathbb{R}^3) \to C$, on définit un foncteur $\mathcal{A}_Z : S(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{Mon}$.*

Ce foncteur associe donc à tout sous-ensemble causal le 2-endomorphisme dans C sur le morphisme $Z(x \xrightarrow{\gamma} y)$. De cette manière, les observables sont reconstitués à partir des propagateurs d'état $x \xrightarrow{\gamma} y$, via la TQCF étendue. Cependant, ce premier résultat ne permet pas encore d'identifier clairement une dualité d'Isbell. Ce qu'établit Z, c'est qu'un foncteur met en relation la TQCA et la TQCF. Or, comme le précise Schreiber, il est possible de voir les réseaux d'algèbres locales comme un co-préfaisceau sur une sous-catégorie de sous-ensembles ouverts d'une variété lorentzienne[6] devant satisfaire la condition d'isotonie (faisant du co-préfaisceau un réseau) ainsi que la condition de localité (les inclusions de deux algèbres assignées à deux sous-ensembles séparés dans l'algèbre assignée au sous-ensemble englobant commutent l'une avec l'autre). Mais il reste à identifier la TQCF étendue comme présentant une structure de préfaisceau, de façon à identifier clairement une relation spectrale entre la « catégorie algébrique » interprétant les algèbres d'observables et la « catégorie géométrique » interprétant les espaces d'état. C'est ce que semble suggérer $\mathcal{TQCF}$ qui est une catégorie de (2-)foncteur, mais il reste à démontrer que les catégories $\mathcal{TQCA}$ et $\mathcal{TQCF}$ sont effectivement liées par une dualité d'Isbell.

Une autre stratégie permet de conjecturer une telle dualité entre les algèbres d'observables et les espaces d'état : la dualité entre la quantification géométrique et la quantification algébrique. Il semble en effet possible d'établir une dualité entre la quantification géométrique fondée sur les goupoïdes symplectiques et la quantification algébrique[7] fondée sur les algèbres stellaires. Schenkel [158] explore précisément cette voie. À l'instar de Schreiber, il parvient à étudier la quantification algébrique de la théorie des jauges à partir d'algèbres de fonctions cosimpliciales, mais cette approche n'aboutit pas davantage à une dualité d'Isbell formelle.

D'autres stratégies sont encore possibles, par exemple en utilisant la dualité entre les algèbres de Poisson (ou les n-algèbres de Poisson) et les variétés de Poisson (resp. les variétés n-plectiques). Toutes ces stratégies traitent de dualité géométrico-algébrique, d'une façon ou d'une autre. Si aucune d'entre elles n'aboutit encore formellement à une dualité d'Isbell, les résultats respectifs semblent néanmoins suffisamment avancés pour conjecturer une dualité d'Isbell en TQC.

Pour conclure, nous dirons que cette conjecture est ultimement suggérée par les résultats de l'analyse fonctionnelle en lien avec la dualité entre les espaces topologiques et les algèbre stellaires. Nous écrivions, dans le chapitre 2, qu'il existe au moins trois points de vue pour étudier les dualités (isbelliennes) « de type Stone » :

- la théorie de la mesure, qui dualise les espaces mesurés et les fonctions mesurables essentiellement bornées ;
- la topologie, qui dualise les espaces topologiques et les fonctions continues ;
- la géométrie riemannienne, qui dualise les espaces riemanniens et les fonctions lisses.

6. Une variété lorentzienne est une généralisation des sous-ensembles causals. Formellement, une *variété lorentzienne* est une variété différentielle M munie d'une section globale $x \mapsto g_x$ de $S^2E \to M$, telle que g_x est une forme bilinéaire g_x de signature $(n, 1)$.

7. La quantification algébrique est davantage connu sous le nom de quantification de déformation (*deformation quantization*).

Nous remarquions que la théorie de la mesure peut en réalité se déduire de la topologie, de sorte que les dualités mises en évidence par l'école de Gelfand trouvent une traduction dans l'école de von Neumann, c'est-à-dire trouvent un point de vue hilbertien. Ce point de vue hilbertien consiste à voir les éléments d'une algèbre stellaire comme des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert. L'intérêt de ce point de vue est qu'il est adapté à la physique, puisque les espaces de Minkowski sont des espaces de Hilbert, c'est-à-dire des espaces « concrets » ou hermitiens [8]. Le passage du point de vue topologique abstrait au point de vue hilbertien est formellement établi par le théorème de Gelfand, Naimark et Segal, appelé construction GNS. Gelfand et Naimark [62] en 1943 puis Segal [165] en 1947 ont montré que toute l'information d'un système physique peut être décrite par une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert, comme représentations irréductibles d'une algèbre stellaire. Or, en mécanique quantique, l'algèbre des observables est une algèbre stellaire. La construction GNS établit ce faisant une correspondance entre la représentation de Heisenberg et la représentation de Schrödinger, qui portent — rappelons le — respectivement leur attention sur les algèbres (stellaires) d'observables, et sur les espaces d'états : étant donné une algèbre stellaire d'observables, l'espace d'état peut être généré à partir de la construction GNS. La question est de savoir si cette dualité est précisément isbellienne.

8. Un espace concret est un espace muni d'un produit scalaire ou hermitien. Ces espaces sont « concrets » car ils possèdent ainsi une notion de norme, et donc de distance, concrète.

Bibliographie

[1] Abramsky, S. et R. Jagadeesan: *New Foundations for the Geometry of Interaction.* Information and Computation, 1 :53–119, 1994.

[2] Akerlof, George: *The Market for "Lemons" : Qualitative Uncertainty and the Market Mechanism.* Quartely Journal of Economics, 1970.

[3] Aristote: *Rhétorique. Tome I : Livre I.* Les Belles Lettres, Paris, 1931.

[4] Aristote: *Topiques Tome 1, Livre I-IV, texte traduit par J. Brunschwig.* Les Belles Lettres, Paris, 1967.

[5] Aristote: *Rhétorique. Tome III : Livre III.* Les Belles Lettres, Paris, 1973.

[6] Aristote: *Organon IV : Les seconds analytiques.* Vrin, 1979.

[7] Aristote: *Organon I et II : Catégories. De l'interprétation.* Vrin, 1994.

[8] Arnauld, Antoine et Pierre Nicole: *La logique ou l'art de pensée.* Vrin, 1993.

[9] Arrow, Kenneth et Gérard Debreu: *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy.* Econometrica, 22 :265–290, 1954.

[10] Arsac, Jacques: *La science informatique.* Dunod, 1970.

[11] Asperti, Andrea et Giuseppe Longo: *Categories, Types, and Structures. An Introduction to Category Theory for the Working Computer Scientist.* Foundations of Computing. MIT Press, Cambridge, 1991.

[12] Atiyah, Michael: *Topological quantum field theories.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, 68 :175–186, 1988.

[13] Bachelard, Gaston: *La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective.* Vrin, Paris, 1967.

[14] Bacon, Francis: *Novum Organum (1620), Introduction, traduction et notes par M. Malherbe et J.-M. Pousseur.* Epiméthée. PUF, 1986.

[15] Barthes, Roland: *L'ancienne rhétorique. Aide-mémoire.* Communications, 16 :172–223, 1970.

[16] Ben-Zvi, David et David Nadler: *Integral transforms and Drinfeld centers in derived algebraic geometry.* J. Amer. Math. Soc., 23 :909–966, 2010.

[17] Ben-Zvi, David et David Nadler: *Loop spaces and connections.* Journal of Topology, 5 :377–430, 2010.

[18] Bergson, Henri: *La pensée et le mouvant.* Les Presses universitaires de France, Paris, 1969.

[19] Beth, E. W.: *Semantic entailment and formal derivability*, tome 18 de *Ededeelingen der Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Afd. Letterkunde.* Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappij, 1955.

[20] Bolzano, Bernard: *Théorie de la science.* Collection Bibliothèque de Philosophie. Gallimard, 2011.

[21] Boole, George: *An Investigation of the Laws of Thought : On Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* Walton & Maberly, London, 1854.

[22] Brisart, Robert (éd.): *Husserl-Frege. Les ambiguïtés de l'antipsychologisme.* Problèmes & Controverses. Vrin, 2002.

[23] Buchsbaum, David: *Exact categories and duality.* Trans. Amer. Math. Soc., 80 :1–34, 1955.

[24] Cantillon, Richard: *Essai sur la nature du commerce en général.* INED, 1997.

[25] Cassel, Gustav: *The Theory of Social Economy.* 1932 edition. New York : Harcourt, Brace and Company, 1918.

[26] Cavaillès, Jean: *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques.* Hermann, Paris, 1981.

[27] Cavaillès, Jean: *Sur la logique et la théorie de la science.* Vrin, 2008.

[28] Cayley, Arthur: *A Sixth Memoir upon Quantics.* Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 149 :61–90, 1959.

[29] Châtelet, Gilles: *Les enjeux du mobile.* Seuil, 1993.

[30] Chauviré, Christiane: *Le grand miroir : essais sur Peirce et sur Wittgenstein.* Presse Universitaires Franc-Comtoises, 2003.

[31] Chauviré, Christiane: *Perception visuelle et mathématiques chez Peirce et Wittgenstein.* Dans Jean-Jacques Rosat, Jacques Bouveresse et (rédacteur) : *Philosophies de la perception : phénoménologie, grammaire et sciences cognitives*, 2003.

[32] Church, Alonzo: *The calculi of lambda-conversion.* Princeton University Press, 1941.

[33] Clifford, William Kingdon: *Mathematical Papers.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2007.

[34] Conway, John: *A course in functional analysis.* Springer, 1990.

[35] Curry, Haskell et Robert Feys: *Combinatory Logic I.* North Holland, 1958.

[36] Debreu, Gérard: *Théorie de la valeur, Analyse axiomatique de l'équilibre économique.* Dunod, Paris, 1965.

[37] Debreu, Gérard: *Excess Demand Functions.* Journal of Mathematical Economics, 1 :15–21, 1974.

[38] Deleuze, Gilles: *Différence et Répétition.* PUF, 1968.

[39] Deleuze, Gilles et Félix Guattari: *Qu'est-ce que la philosophie ?* Les Éditions de Minuit, 2012.

[40] Deligne, Pierre: *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L.* Dans Springer (rédacteur) : *Modular functions in one variable II (Proc. Summer School, Univ. Antwerp, RUCA, July 17–August 3, 1972)*, numéro 349 dans *Lect. Notes in Math.*, pages 501–597, 1973.

[41] Desanti, Jean Toussaint: *La philosophie silencieuse, ou critique des philosophies de la science (L'ordre philosophique).* Le Seuil, Paris, 1975.

[42] Descartes, René: *La Géométrie.* Hermann, 1886.

[43] Detlefsen, Michael: *Ideals of Proof : An Overview.* rapport technique, MSH (Maison des Sciences de l'Homme), Lorraine, Nancy, France, 2007.

[44] Dewey, John: *How we Think.* D.C.Heath & Co., 1910.

[45] Dewey, John: *Reconstruction in Philosophy*, tome 12. Henry Holt and Company, New York, 1920.

[46] Dewey, John: *Logic : The theory of inquiry.* Henry Holt & Co, New York, 1938.

[47] Dowek, Gilles: *Les métamorphoses du calcul. Une étonnante histoire des mathématiques.* Le Pommier, 2007.

[48] Einstein, Albert: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper.* Annalen der Physik, 17, 1905.

[49] Eisenbud, David et Joe Harris: *The Geometry of Schemes.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000.

[50] Euclide: *Les Éléments.* PUF, Paris, 1994.

[51] Fabre, Michel: *Éduquer pour un monde problématique. La carte et la boussole.* Sociologie et Sciences de l'éducation. PUF, collection l'Interrogation philosophique, 2011.

[52] Fabre, Michel: *Philosophie et pédagogie du problème.* Vrin, Paris, 2013.

[53] Fermat, Pierre de: *Œuvres de Fermat.* Gauthier-Villars, Paris, 1891.

[54] Frege, Gottlob: *Über Sinn und Bedeutung.* Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, C :25–50, 1892.

[55] Frege, Gottlob: *Über Funktion und Begriff. Iena. Trad. fr. Fonction et concept.* Dans *Ecrits logiques et philosophiques*, pages 80–101. Seuil, Paris, 1971.

[56] Frege, Gottlob: *Über Begriff und Gegenstand. Vierteljahreszeitschrift für wissenschaftliche Philosophie, 16 :192-205. Trad. fr. Concept et objet.* Dans *Ecrits logiques et philosophiques*, pages 127–154. Seuil, Paris, 1972.

[57] Frege, Gottlob: *L'idéographie, un langage formulaire de la pensée pure construit d'après celui de l'arithmétique.* Vrin, « Bibliothèque des Textes Philosophiques », 1999.

[58] Fritz, Peter et Hermann Weyl: *Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe.* Math. Ann., 97 :737–755, 1927.

[59] Gale, David: *The Law of Supply and Demand.* Mathematica Scandinavica, 3 :155–169, 1955.

[60] Gauss, Carl Friedrich: *Disquisitiones generales circa superficies curvas (Recherches générales sur les surfaces courbes).* Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores 6 (classis mathematicae), pages 99–146, 1828.

[61] Gelfand, Israel: *Normierte Ringe.* Mat. Sbornik, 51(9) :3–24, 1941.

[62] Gelfand, Israel et M Naimark: *On the embedding of normed linear rings into the ring of operators in Hilbert space.* Mat. Sbornik, 12 :197–213, 1943.

[63] Gentzen, Gerhard: *Untersuchungen über das logische Schließen. II.* Mathematische Zeitschrift, 39 :405–31, 1935.

[64] Georgescu-Roegen, Nicholas: *Methods in economic science.* Journal of Economic Issues, 13(2) :317–28, 1979.

[65] Ghetaldi, Marin: *De resolutione et compositione mathematica.* Chambre apostolique (publication posthume), 1630.

[66] Girard, Jean Yves: *Linear Logic.* Theoretical Computer Science, 50 :1–102, 1987.

[67] Girard, Jean Yves: *Geometry of interaction I : interpretation of system F.* Dans In Ferro, Bonotto, Valentini et Zanardo (rédacteurs) : *Logic Colloquium '88*, pages 221–260. Amsterdam. North-Holland., 1989.

[68] Girard, Jean Yves: *Towards a geometry of interaction.* Contemp. Math., 92 :69–108, 1989.

[69] Girard, Jean Yves: *On the meaning of logical rules I : syntax vs. semantics.* Dans Berger, U. et H. Schwichtenberg eds (rédacteurs) : *Computational Logic*, Nato Series F 165, pages 215–272. Springer, 1999.

[70] Girard, Jean Yves: *La syntaxe transcendantale, manifeste*, 2011. http://iml.univ-mrs.fr/~girard/syntran.pdf.

[71] Girard, Jean Yves: *Transcendantal syntax 2.0*, 2012. http://iml.univ-mrs.fr/~girard/TS2.pdf.

[72] Gonseth, Ferdinand: *La Géométrie et le problème de l'espace*, tome 1 à 4. Editions du Griffon, 1945.

[73] Granger, Gilles Gaston: *Contenus formels et dualité.* Manuscrito, X(2), 1987.

[74] Granger, Gilles Gaston: *Pour la Connaissance philosophique*. Odile Jacob, Paris, 1988.

[75] Granger, Gilles Gaston: *Formes, opérations, objets*. Vrin, 1994.

[76] Granger, Gilles Gaston: *La pensée de l'espace*. Odile Jacob, Paris, 1999.

[77] Graßman, Hermann Günther: *Die lineale Ausdehnungslehre*. Leipzig : Wiegand, 1844.

[78] Graßman, Hermann Günther: *Die Ausdehnungslehre, vollstandig und in strenger Form bearbeitet*. Berlin : Enslin, 1862.

[79] Grothendieck, Alexander: *The cohomology theory of abstract algebraic varieties*. Dans *Proc. Internat. Congress Math. (Edinburgh, 1958)*, pages 103–118, New York, 1960. Cambridge Univ. Press.

[80] Grothendieck, Alexander: *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1960-61 - Revêtements étales et groupe fondamental - (SGA 1)*, tome 224 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1971.

[81] Haag, Rudolph: *An algebraic approach to quantum field theory*. Journal of Mathematical Physics, 5 :848–861, 1964.

[82] Haag, Rudolph: *Local Quantum Physics : Fields, Particles, Algebras*. Springer, 1996.

[83] Haghverdi, E.: *A categorical approach to linear logic, geometry of proofs and full completeness*. Thèse de doctorat, University of Ottawa, 2000.

[84] Haghverdi, E. et P. Scott: *A categorical model for the geometry of interaction*. Theoretical Computer Science, 350 :252–274, 2006.

[85] Hahn: *On some problems of proving the existence of an equilibrium in a monetary economy*. Dans *The theory of interest rates*, pages 126–135. F.H. Hahn et F. Brechling, Macmillan, 1965.

[86] Hegel, Georg Wilhelm Friedrich: *Wissenschaft des Logik, II, Grande Logique, éd. Lasson, Hamburg, F. Meiner, 1975 ; trad.fr. par S. Jankélévitch, Science de la logique, I-II*. Paris, Aubier, 1949.

[87] Heyting, A.: *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik*. Erkenntnis, 2 :106–115, 1931.

[88] Hicks, John: *Value and Capital : An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*. Oxford : Clarendon Press, 1939, 2nd ed. 1946.

[89] Hoare, Tony: *An axiomatic basis for computer programming*. Communications of the ACM, 12(10) :576–585, 1969.

[90] Hopkins, Mike et Jacob Lurie: *Talks on TQFT*. rapport technique, Hausdorff Institute for Mathematics, Bonn, 2008.

[91] Howard, W. A.: *The formulae-as-types notion of construction*, pages 479–490. Academic Press, London, 1980.

[92] Huntington, Edward: *Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic.* Transactions of the American Mathematical Society, 35 :288–309, 1904.

[93] Husserl, Edmund: *Philosophie der Arithmetik. (Husserliana XII, L. Eley (dir.), La Hague, 1970).* Halle, 1891.

[94] Husserl, Edmund: *Recherches logiques. Tome 1 : Prolégomènes à la logique pure.* PUF, 2003.

[95] Isbell, John: *Structure of categories.* Bulletin of the American Mathematical Society, 72 :619–655, 1966.

[96] Isbell, John: *Normal completions of categories.* Dans Springer (rédacteur) : *Reports of the Midwest Category Seminar*, tome 47, pages 110–155, 1967.

[97] Johnstone, Peter: *Stone Spaces*, tome 3 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, 1982.

[98] Joinet, Jean Baptiste: *Ouvrir la logique au monde.* Dans Hermann (rédacteur) : *Ouvrir la logique au monde.* Jean-Baptiste Joinet et Samuel Tronçon, 2009.

[99] Joyal, André, Ross Street et Dominic Verity: *Traced Monoidal Categories.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 119 :447–468, 1996.

[100] Kadison, R.V., Ringrose J.R.: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras : Elementary Theory.* Academic Press, 1983.

[101] Kadison, R.V., Ringrose J.R.: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras : Advanced Theory.* Academic Press, 1986.

[102] Kant, Immanuel: *Kritik der reinen Vernunft, 2e éd. 1787, éd. Cassirer, III ; trad. fr. par A. Tremesaygues et B. Pacaud, Critique de la Raison pure, 3e éd.* Paris, P.U.F., 1963.

[103] Keynes, John Maynard: *A Treatise on Money.* London : Mac-millan, 1930.

[104] Keynes, John Maynard: *The General Theory of Employment, Interest, and Money.* Cambridge University Press, 1936.

[105] Klein, Felix: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Erlangen, 1872.

[106] Kolmogorov, A.N.: *Zur Deutung der intuitionistischen Logik.* Mathematische Zeitschrift, 35 :58–65, 1932.

[107] Krömer, Ralf et David Corfield: *The Form and Function of Duality in Modern Mathematics.* Philosophia Scientiæ, 3, 2014.

[108] Lavand, Nadine: *Montrer et démontrer.* Itinéraires philosophiques. Delagrave, 2008.

[109] Lawvere, William: *Some thoughts on the future of category theory.* Lecture Notes in Mathematics, 1488 :1–13, 1991.

[110] Lawvere, William: *Categories of space and quantity.* Dans al, J. Echeverria et (rédacteur) : *The Space of Mathematics : Philosophical, Epistemological and Historical Explorations*, In- ternational Symposium on Structures in Mathematical Theories (1990), San Sebastian, Spain, pages 14–30, Berlin, 1992. DeGruyter.

[111] Lawvere, William: *Grassmann's Dialectics and Category Theory.* Dans Schubring, Gert (rédacteur) : *Proceedings of the 1994 Conference to commemorate 150 years of Grassmann's "Ausdehnungslehre", Hermann Günther Graßmann (1809–1877) : Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar*, tome 187 de *Boston Studies in the Philosophy of Science*, pages 255–264. Dordrecht- Boston-London, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[112] Lawvere, William: *Unity and identity of opposites in calculus and physics.* Applied Categorical Structures, 4 :167–174, 1996.

[113] Lawvere, William: *Taking categories seriously.* Reprints in Theory and Applications of Categories, 8 :1–24, 2005.

[114] Lawvere, William et Robert Rosebrugh: *Sets for Mathematics.* Cambridge Univ. Press, 2003.

[115] Lawvere, William et Stephen Schanuel: *Conceptual Mahtematics. A first introduction to categories.* Cambridge University Press, 1997.

[116] Le Gall, Philippe: *La première démonstration d'existence d'un équilibre général, par Abraham Wald (1935-1936).* Économies et Sociétés, Série Oeconomia, 15 :117–137, 1991.

[117] Le Moigne, Jean Louis: *La théorie du système général. Théorie de la modélisation.* PUF, 1977.

[118] Leibniz, Gottfried Wilhelm: *De Arte Combinatoria.* Sämtliche Schriften und Briefe (Berlin : Akademie Verlag, 1923), A VI 1, p. 163 ; Philosophische Schriften (Gerhardt) Bd. IV p. 30, 1666.

[119] Leibniz, Gottfried Wilhelm: *La caractéristique géométrique.* Vrin, 1995.

[120] Leontief, Wassily: *The Structure of American Economy.* Cambridge, Harvard University Press, 1941.

[121] Löwenheim, Leopold: *On possibilities in the calculus of relatives.* Dans *A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, pages 228–51. Harvard Univ. Press, 1967.

[122] Mac Lane, Saunders: *Duality for groups.* Bull. Amer. Math. Soc., 56 :485–516, 1950.

[123] Mac Lane, Saunders: *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1991.

[124] Manes, E.G. et M.A. Arbib: *Algebraic Approaches to Program Semantics.* Springer-Verlag, 1986.

[125] Mantel, Rolf: *On the Characterization of Excess Demand.* Journal of Economic Theory, 7 :348–353, 1974.

[126] Martin-Löf, Per: *Intuitionistic Type Theory.* Bibliopolis Naples, 1984.

[127] Martin-Löf, Per: *On the Meanings of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws.* Nordic Journal of Philosophical Logic, 1(1) :11–60, 1996.

[128] McKenzie, Lionel: *On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems.* Econometrica, 22 :147–161, 1954.

[129] Melliès, Paul André et Noam Zeilberger: *Functors are Type Refinement Systems.* Dans *Proceedings of the 42nd ACM SIGPLAN- SIGACT Symposium on Principles of Programming*, Mumbai, 2015.

[130] Melliès, Paul André et Noam Zeilberger: *An Isbell Duality Theorem for Type Refinement Systems.* 2015.

[131] Menger, Karl: *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums.* Rééd. dirigée par E. Dierker et K. Sigmund, Vienne, Springer, 1998.

[132] Mill, John Stuart: *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive*, tome 2 vol. University of Northern Iowa, 1843.

[133] Minkowski, Hermann: *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.* Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, pages 53–111, 1908.

[134] Mumford, David: *The Red Book of Varieties and Schemes The Red Book of Varieties and Schemes.* Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1974.

[135] Murphy, G.J.: *C∗-algebras and Operator Theory.* Academic Press, 1990.

[136] Neumann, John von: *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren.* Math. Ann., 102 :370–427, 1930.

[137] Nikaido, Hukukane: *On the Classical Multilateral Exchange Problem.* Metroeconomica, 8 :135–145, 1956.

[138] Orléan, André: *L'empire de la valeur.* Seuil, La couleur des idées, 2011.

[139] Pareto, Vilfredo: *Les systèmes socialistes. Cours professé à l'Université de Lausanne.* Paris, V. Giard et E. Brière, "Bibliothèque Internationale d'Économie Politique", 1902-03.

[140] Pareto, Vilfredo: *Manuel d'économie politique. Traduit sur l'édition italienne par Alfred Bonnet (revue par l'auteur).* V. Giard & E. Brière, Paris, 1909.

[141] Patinkin, Don: *Money, Interst and Prices.* New-York : Harper and Row, 1965.

[142] Peacock, George: *Treatise on Algebra.* Cambridge : J. & J.J. Deighton, 1830.

[143] Péguy, Charles: *De la cité socialiste.* Revue socialiste, 1897.

[144] Peirce, Charles Sanders: *Collected Papers of Charles Sanders Peirce, 8 vol.* Harvard University Press, Cambridge, 1931-35.

[145] Peirce, Charles Sanders: *On an Improvement in Boole's Calculus of Logic.* Dans Hartshorne, C. et P. Weiss (rédacteurs) : *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, 7 (1867), 250-261. Reprinted in Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Volume III : Exact Logic*, pages 3–15, London, 1967. Oxford University Press.

[146] Platon: *Théétète.* Philèbe, 1824.

[147] Prouté, Alain: *Introduction à la Logique Catégorique.* Cours de Master 2 de Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique, 2008.

[148] Quine, Willard Van Orman: *Speaking of Objects.* Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association, 31 :5–22, 1957-1958.

[149] Rasiowa, H. et R. Sikorski: *The Mathematics of Metamathematics.* Warszawa, second ed. édition, 1968.

[150] Riemann, Behrnard: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer verändlicher komplexer Grösse. Trad. : « Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe ».* Thèse de doctorat, Göttingen, 1851.

[151] Riesz, Marcel: *Sur les opérations fonctionnelles linéaires.* C. R. Acad. Sci. Paris, 149 :974–977, 1909.

[152] Rosier, Bernard: *Wassily Leontief : textes et itinéraire.* Paris, La Découverte, 1986.

[153] Russell, Bertrand: *On the Logic of Relations with Applications to Arithmetic and the Theory of Series.* Dans *Papers 3*, pages 590–612. 1900.

[154] Russell, Bertrand: *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types.* American Journal of Mathematics, 30(3) :222–262, 1908.

[155] Samuelson, Paul: *The Stability of Equilibrium : Comparative Statics and Dynamics.* Econometrica, 9(2) :97–120, 1941.

[156] Samuelson, Paul: *The Relation between Hicksian Stability and True Dynamic Stability.* Econometrica, 12(3/4) :256–7, 1944.

[157] Samuelson, Paul: *A modern treatment of the Ricardian economy : I. The pricing of goods and of labor and land services.* Quarterly Journal of Economics, 73(1) :p. 1–35, 1959.

[158] Schenkel, Alexander: *On the problem of gauge theories in locally covariant QFT.* Dans *Operator and Geometric Analysis on Quantum Theory*, Trento, 2014.

[159] Schreiber, Urs: *AQFT from n-functorial QFT.* Commun. Math. Phys., pages 291–357, 2009.

[160] Schreiber, Urs: *Duality between algebra and geometry in physics, https ://ncatlab.org/nlab/show/Isbell+duality+-+table*, 2013. https://ncatlab.org/nlab/show/Isbell+duality+-+table.

[161] Schröder, Ernst: *Der operationskreis des logikkalkuls.* Teubner, Leipzig, 1877.

[162] Schumpeter, Joseph: *History of Economic Analysis.* Allen and Unwin Ltd, 1954.

[163] Scott, Dana et Christopher Strachey: *Toward a mathematical semantics for computer languages*, tome PRG-6. Oxford Programming Research Group Technical Monograph, 1971.

[164] Segal, Graeme: *Topological structures in string theory.* The Royal Society, 359 :1389–1398, 2001.

[165] Segal, Irving: *Irreducible representations of operator algebras.* Bull. Am. Math. Soc., 53 :73–88, 1947.

[166] Séminaire Henri Cartan: *Faisceaux sur un espace topologique I & II*, 1950-51.

[167] Serfati, Michel: *Sur l'abstrait et le concret en mathématiques, et l'axiomatique, dans l'œuvre de Marshall Stone.* Notae Philosophicae Scientiae Formalis, 2(2) :175–191, 2013.

[168] Skolem, Thoralf: *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkcit oder Beweisbarkeit mathematischer Satze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiana.* Matematisk-naturvidenskabelig Klasse, 4, 1920.

[169] Smith, Adam: *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations.* The Harvard classics, edited by Charles W. Eliot. New York : P.F. Collier & Son, 1909–14.

[170] Sonnenschein, Hugo: *Do Walras' Identity and Continuity Characterize the Class of Community Excess Demand Functions ?* Journal of Economic Theory, 6 :345–54, 1973.

[171] Stackelberg, Heinrich von: *Zwei kritische Bemerkungen zur Preistheorie Gustav Cassel.* Zeitschrift für Nationalökonomie, 4 :436–72, 1933.

[172] Stiglitz, Joseph: *Monopoly, Non-linear Pricing, and Imperfect Information : The Insurance Market.* Review of Economic Studies, 44 :407–30, 1977.

[173] Stone, Marshall: *The theory of representation for Boolean algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., 40 :37–111, 1936.

[174] Stone, Marshall: *Algebraic characterizations of Special Boolean rings.* Fund. Math., 29 :223–303, 1937.

[175] Stone, Marshall: *Applications of the theory of Boolean rings to general topology.* Trans. Amer. Math. Soc., 41 :375–481, 1937.

[176] Stone, Marshall: *Topological representations of Distributive Lattices and Brouwerian Logics.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, 67 :1–25, 1937.

[177] Stone, Marshall: *The representations of Boolean algebras.* Bull. Amer. Math. Soc., 44 :807–816, 1938.

[178] Szabo, Arpad: *L'aube des mathématiques grecques.* Vrin - Mathesis, 2000.

[179] Takesaki, M.: *Theory of Operator Algebras I.* Springer, 2001.

[180] Tannery, Paul: *Mémoires scientifiques, t. 1, 1912 - Sciences exactes dans l'antiquité (1876-1883).* Histoire des sciences. Éditions Jacques Gabay, 1912.

[181] Tarski, Alfred: *Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen, Akademischer Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien.* Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, 69, 1932.

[182] Tronçon, Samuel: *Interaction et signification.* Dans *Logique, dynamique et cognition*, pages 147–171, Paris, 2007. Presses de la Sorbonne.

[183] Turing, Alan: *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*, tome 2. Proceedings of the London Mathematical Society, 1936.

[184] Valence, Arnaud: *Éléments pour une heuristique transcendantale. Nouvelles lumières sur l'art de problématiser.* EDUCAZIONE. Giornale di pedagogia critica, III(1) :99–120, 2014.

[185] Vezzosi, Gabriele: *What is …a derived stack ?* Notices Am. Math. Soc., 58(7) :955–958, 2011.

[186] Viète, François: *Introduction à l'Art analytique ou Algèbre nouvelle.* Ed. Georg Olms Verlag, Hildesheim-New-York, 1970.

[187] Vuillemin, Jules: *La philosophie de l'algèbre : Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne.* Epiméthée. Presses Universitaires de France, 1962.

[188] Wald, Abraham: *On Some Systems of Equations of Mathematical Economics.* Econometrica, 19(4) :368–403, 1936.

[189] Walras, Léon: *Éléments d'économie politique pure, ou Théorie de la richesse sociale.* R. Pichon et R. Durand-Auzias (Paris), 1926.

[190] Weil, E.: *La Place de la logique dans la pensée aristotélicienne.* Revue de Métaphysique et de Morale, 56, 1951.

[191] Weyl, Hermann: *Invariants.* Duke Math. J., 5(3) :489–502, 1939.

[192] Whitehead, Alfred North: *A Treatise on Universal Algebra.* Cambridge University Press, 1898.

[193] Wicksell, Kurt: *Interest and Prices.* London : Macmillan, 1898.

[194] Wittgenstein, Ludwig: *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.* G.E.M Ansombe, G.H von Wright, et Rush Rhees, 1956.

[195] Wittgenstein, Ludwig: *Philosophie pour mathématiciens : les cours de Cambridge 1932-1933 (traduc. E. Rigal).* Trans Europ Repress (TER), 1992.

[196] Wittgenstein, Ludwig: *Recherches philosophiques*. Gallimard, 2014.

[197] Zeilberger, Noam: *Isbell duality*. https ://ncatlab.org/nlab/show/Isbell+duality, Septembre 2010.

Table des figures

Liste des tableaux